第四讲　函数的奇偶性与周期性

KE QIAN XUE SHENG DU YU CE

课前学生读与测

读 知识与方法梳理

1．奇函数、偶函数定义

(1)如果对于函数$f(x)$的定义域内任意一个x，都有__$f(-x)=-f(x)$_____；即互为相反数的两个自变量值对应的函数值互为相反数，那么函数$f(x)$就叫做奇函数．

(2)如果对于函数$f(x)$的定义域内任意一个x，都有__$f(-x)=f(x)$____，即互为相反数的两个自变量值对应的函数值相等．那么函数$f(x)$就叫做偶函数．

2．奇函数和偶函数的性质

(1)奇函数图象关于<u>原点</u>对称；偶函数图象关于<u>y轴</u>对称．

(2)偶函数在区间(a，b)上递增(减)，则在($-b$，$-a$)上<u>递减(增)</u>，奇函数在区间(a，b)与($-b$，$-a$)上的增减性<u>相同</u>．

3．奇偶函数的判断

(1)定义是判断函数奇偶性的主要依据，就是确定 $f(x)$与 $f(-x)$的关系．

(2)为了便于判断函数的奇偶性，有时需要先将函数进行化简，或利用定义的等价式：$f(-x)=\pm f(x)\Leftrightarrow f(-x)\pm f(x)=0\Leftrightarrow\frac{f(-x)}{f(x)}=\pm1(f(x)\neq0)$．

4．周期函数定义

对于函数$f(x)$，如果存在一个非零常数T，使得当x取定义域内的每一个值时，都有__$f(x+T)=f(x)$________，那么函数$f(x)$就叫做周期函数，T为函数的一个周期.

测

1．(2010·**广东**)若函数$f(x)=3^x+3^{-x}$与$g(x)=3^x-3^{-x}$的定义域均为**R**，则(　　)

A．$f(x)$与$g(x)$均为偶函数

B．$f(x)$为偶函数，$g(x)$为奇函数

C．$f(x)$与$g(x)$均为奇函数

D．$f(x)$为奇函数，$g(x)$为偶函数

[解析]　$f(-x)=3^{-x}+3^x=f(x)$，

$g(-x)=3^{-x}-3^x=-g(x)$.

[答案]　B

2．函数 $f(x)=\frac{1}{x}-x$ 的图象关于(　　)

A．y 轴对称　　B．直线 $y=-x$ 对称

C．坐标原点对称　　D．直线 $y=x$ 对称

[答案]　C

3．(2010·山东)设$f(x)$为定义在**R**上的奇函数．当$x\geq 0$时，$f(x)=2^x+2x+b$(b为常数)，则$f(-1)=$(　　)

A．3　　　　B．1

C．-1　　　　D．-3

[解析]　因为$f(x)$为定义在**R**上的奇函数，所以$f(0)=0$，可求得$b=-1$，$f(-1)=-f(1)=-(2^1+2+b)=-3$.故选D.

[答案]　D

KE NEI SHI SHENG JIANG YU XUE

课内师生讲与学

主要题型研究

题型1 判断函数的奇偶性

例1 (1) $f(x)=\lg x^2+\lg\frac{1}{x^2}$;

(2) $f(x)=(x-1)\cdot\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$;

(3) $f(x)=\lg\frac{1-x}{1+x}$;

(4) $f(x)=\begin{cases} x^2+x & (x<0) \\ -x^2+x & (x>0) \end{cases}$;

(5) $f(x)=x^2-|x-a|+1$.

[解]　(1)函数的定义域$(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$，关于原点对称，且 $f(x)=\lg(x^2\cdot\frac{1}{x^2})=0.(x\neq 0)$．$\therefore f(x)$既是奇函数又是偶函数．

(2)由$\frac{1+x}{1-x}\geqslant 0$ 得定义域为$[-1,1)$，关于原点不对称，故$f(x)$为非奇非偶函数．

(3)由$\frac{1-x}{1+x}>0$得$-1<x<1$，故$f(x)$的定义域为$(-1,1)$.

$\because f(-x)=\lg\frac{1+x}{1-x}=\lg(\frac{1-x}{1+x})^{-1}=-\lg\frac{1-x}{1+x}=-f(x)$.

所以$f(x)$为奇函数.

(4)当$x<0$时，$-x>0$，则$f(-x)=-(-x)^2-x$

$=-(x^2+x)=-f(x)$;

当$x>0$时，$-x<0$，则$f(-x)=(-x)^2-x=x^2-x$

$=-(-x^2+x)=-f(x)$.

∴对任意$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$都有$f(-x)=-f(x)$. ∴$f(x)$为奇函数.

(5)函数的定义域为**R**.

当$a=0$时，$f(x)=x^2-|x|+1$.有$f(-x)=f(x)$,

∴$f(x)$是偶函数.

当$a\neq0$时，$f(a)=a^2+1$，$f(-a)=a^2-2|a|+1$.

$f(a)\neq f(-a)$.

且$f(a)+f(-a)=2(a^2-|a|+1)$

$=2(|a|-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{2}\neq0$.

∴$f(x)$为非奇非偶函数.

[点评与警示]　判断函数的奇偶性，应首先求出函数的定义域，并视定义域是否关于原点对称．只有定义域关于原点对称，才有验证是否有$f(-x)=f(x)$或$f(-x)=-f(x)$的必要．

题型 2　利用函数奇偶性求参数的值或取值范围

例 2　已知$f(x)$是定义在$(-1,1)$上的偶函数，且在区间$[0,1)$上是增函数，若有不等式$f(a-2)-f(3-a)<0$成立．求实数a的取值范围．

[解]　因为 $f(x)$是定义在$(-1,1)$上的偶函数，由 $f(a-2)-f(3-a)<0$ 得 $f(|a-2|)<f(|3-a|)$.

又因为 $f(x)$在$[0,1)$上递增，从而有

$$\begin{cases}-1<a-2<1\\-1<3-a<1\\|a-2|<|3-a|\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1<a<3\\2<a<4\\a<\dfrac{5}{2}\end{cases}\Rightarrow 2<a<\frac{5}{2}$$

，于是 a 的取值范围是$\left(2,\ \dfrac{5}{2}\right)$.

[点评与警示]　本例题的求解过程中，既要利用函数的奇偶性，又要利用函数的单调性．求解此类问题的一般思路有两条：一是就$a-2$与$3-a$的符号进行分类讨论(过程繁琐)；二是利用偶函数的性质$f(-x)=f(x)=f(|x|)$．而得到"$|x_1|<|x_2|\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$"．

◆ 变形思考1

已知$f(x)$是定义在$(-1,1)$上的偶函数，且在区间$(-1,0]$上是减函数，若有不等式$f(a-2)-f(a-3)<0$成立，求实数a的取值范围．　[解]　$f(x)$为偶函数，在$(-1,0]$上是减函数，$\therefore f(x)$在$[0,1)$上是增函数　$f(|a-2|)<f(|a-3|)$

$$\begin{cases}-1<a-2<1\\-1<a-3<1\\|a-2|<|3-a|\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1<a<3\\2<a<4\\a<\dfrac{5}{2}\end{cases}\Rightarrow 2<a<\frac{5}{2}$$

$\therefore a$ 的取值范围$(2,\dfrac{5}{2})$

题型3　函数的奇偶性、单调性、周期性的综合应用

例3　函数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{1+x^2}$是定义在$(-1,1)$上的奇函数，且 $f(\dfrac{1}{2})=\dfrac{2}{5}$.

(1)确定函数 $f(x)$的解析式；

(2)用定义证明 $f(x)$在$(-1,1)$上是增函数；

(3)解不等式 $f(t-1)+f(t)<0$.

[分析]　(1)通过建立方程，求出a、b的值．确定$f(x)$的解析式．(3)利用函数的单调性脱掉“f”.

[解]　(1)依题意，得$\begin{cases} f(0)=0 \\ f(\frac{1}{2})=\frac{2}{5} \end{cases}$

即$\begin{cases} \dfrac{b}{1+0^2}=0 \\ \dfrac{\frac{a}{2}+b}{1+\frac{1}{4}}=\dfrac{2}{5} \end{cases}$ $\Rightarrow\begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases}$

$\therefore f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$.

(2)任取$-1<x_1<x_2<1$，$f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{x_1}{1+x_1^2}-\dfrac{x_2}{1+x_2^2}=$

$\dfrac{(x_1-x_2)(1-x_1x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}$

$\because -1<x_1<x_2<1$，$\therefore x_1-x_2<0$

$1+x_1^2>0,1+x_2^2>0$.又$\because -1<x_1\cdot x_2<1$，

$\therefore 1-x_1x_2>0.\therefore f(x_1)-f(x_2)<0$.

$\therefore f(x)$在$(-1,1)$上是增函数.

(3)$f(t-1)<-f(t)=f(-t)$，$\because f(x)$在$(-1,1)$上是增函数

$\therefore -1<t-1<-t<1$，解得$0<t<\dfrac{1}{2}$.

[点评与警示]　(1)如果一个奇函数在$x=0$处有定义．那么$f(0)=0$.

(2)解不等式$f(t-1)+f(t)<0$时，注意函数定义域对t的限制.

◆变形思考2

函数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{1+x^2}$ 是定义在 $(-1,1)$ 上的奇函数，且 $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{2}{5}$

(1)确定函数 $f(x)$ 的解析式；

(2)用定义证明 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上是增函数；

(3)解不等式 $f(1-t)+f(-t)<0$.

[答案]　(1) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$　(2)略　(3) $\dfrac{1}{2}<t<1$

例 4 已知奇函数$f(x)$定义在$\mathbf{R}$上，其图象关于直线$x=1$对称，当$x\in[0,1]$时，$f(x)=2^x-1$.

(1)当$x\in[-1,0)$时，求$f(x)$的表达式；

(2)证明$f(x)$是周期函数，并求出它的一个周期；

(3)当$x\in[4,5]$时，求$f(x)$.

[解]　(1)当$-1\leq x<0$时．$-x\in(0,1]$，而$f(-x)=2^{-x}-1$，且$f(x)$是奇函数．所以$f(-x)=-f(x)$，即$f(x)=-f(-x)=-2^{-x}+1$.

(2)因为$f(x)$的图象关于直线$x=1$对称，所以$f(x)=$

$f(2-x)$，用$-x$替换x，就有$f(-x)=f(2+x)$．由$f(x)$是奇函数得$f(-x)=-f(x)$，所以$f(2+x)=-f(x)$，进而$f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$．可知$f(x)$是周期函数，4是它的一个周期.

(3)当$4\leq x\leq 5$时，$0\leq x-4\leq 1$.所以$f(x-4)=2^{x-4}-1$.

而$f(x-4)=f(x)$，所以$f(x)=2^{x-4}-1(x\in[4,5])$为所求.

[点评与警示]　(1)已知奇函数$f(x)$的图象关于$x=a$对称，则$f(x)$是周期函数，且$4a$为其中的一个周期；若偶函数$f(x)$的图象关于直线$x=a$对称，则$2a$为其中的一个周期.

(2)注意分清函数图象的几种关系：①若$f(x)$满足$f(a+x)=f(a-x)$，则$f(x)$的图象关于直线$x=a$对称.

②若$f(x)$满足$f(x+a)=f(x-a)$，则$f(x)$的周期为$2a$.

③函数$y=f(x-a)$与函数$y=f(a-x)$图象关于直线$x=a$对称.

JIE TI JING YAN GONG XIANG

解题经验共享

1．判断函数奇偶性就是看$f(-x)$与$f(x)$是否有相等关系或互为相反数的关系．

2．函数的奇偶性是对整个定义域而言的，因此讨论函数奇偶性首先要看其定义域．“函数的定义域关于原点对称”是它具有奇偶性的前提．

3．要注意从数和形两个角度理解函数的奇偶性．要充分利用$f(x)$与$f(-x)$之间的转化关系和图象的对称性解决有关问题．

4．解题中要注意以下性质的灵活运用.

(1)$f(x)$为偶函数⇔$f(x)=f(|x|)$.

(2)若奇函数 $f(x)$的定义域包含 $x=0$.则 $f(0)=0$.

5．$f(x)$为周期函数，T 为 $f(x)$的一个周期，则 $kT(k\in\mathbf{Z}$，$k\neq0)$也是 $f(x)$的周期.

6．容易得到①$f(x+c)=-f(x)$，则 $f(x+2c)=f(x)$，②$f(x+c)=\pm\frac{1}{f(x)}$，则 $f(x+2c)=f(x)$，即 $2c$ 是 $f(x)$的周期.

KE WAI XUE SHENG LIAN YU WU

课外学生练与悟