第一章

函数、极限与连续

分析基础
- **函数** — 研究对象
- **极限** — 研究方法
- **连续** — 研究桥梁

第一节 函数

一、区间与邻域

二、映射与函数

三、函数的几种特性

四、复合函数和反函数

五、基本初等函数与初等函数

六、建立函数关系

一、 区间与邻域

定义及表示法

定义 1 具有某种特定性质的事物的总体称为**集合**.

组成集合的事物称为**元素**.

不含任何元素的集合称为**空集**，记作 $\varnothing$.

元素 a 属于集合 M，记作 $a \in M$.

元素 a 不属于集合 M，记作 $a \in M$ (或 $a \notin M$).

注: M 为数集 $\begin{cases} M^{*} \text{表示 } M \text{ 中排除 0 的集；} \\ M^{+} \text{表示 } M \text{ 中排除 0 与负数的集.} \end{cases}$

表示法:

(1) 列举法：按某种方式列出集合中的全体元素 .

例: 有限集合 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}=\{a_i\}_{i=1}^{n}$

自然数集 $\mathrm{N}=\{0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}=\{n\}$

(2) 描述法: $M=\{x \mid x \text{ 所具有的特征}\}$

例: 整数集合 $\mathrm{Z}=\{x \mid x\in\mathrm{N} \text{ 或} -x\in\mathrm{N}^+\}$

有理数集 $\mathrm{Q}=\left\{\dfrac{p}{q} \,\middle|\, p\in\mathrm{Z}, q\in\mathrm{N}^+, \ p \text{ 与 } q \text{ 互质}\right\}$

实数集合 $\mathrm{R}=\{x \mid x \text{ 为有理数或无理数}\}$

定义2 设a和b为实数，定义

开区间 $(a, b)=\{x \mid a<x<b\}$

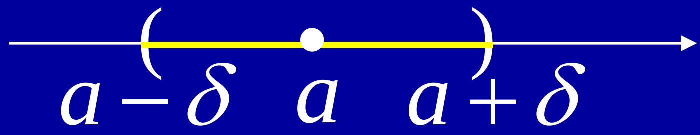
闭区间 $[a, b]=\{x \mid a\le x\le b\}$

半开区间 $[a,b)=\{x \mid a\le x<b\}$

$$(a,b]=\{x \mid a<x\le b\}$$

无限区间 $[a,+\infty)=\{x \mid a\le x\}$　　$(-\infty,b]=\{x \mid x\le b\}$

$$(-\infty,+\infty)=\{x \mid x\in \mathrm{R}\}$$



定义3　设 a 和 δ 是两个实数，且 $\delta>0$

点的 **δ邻域** $\mathrm{U}(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}$

$$=\{x \mid |x-a|<\delta\}$$

去心 **δ邻域** $\mathring{\mathrm{U}}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$

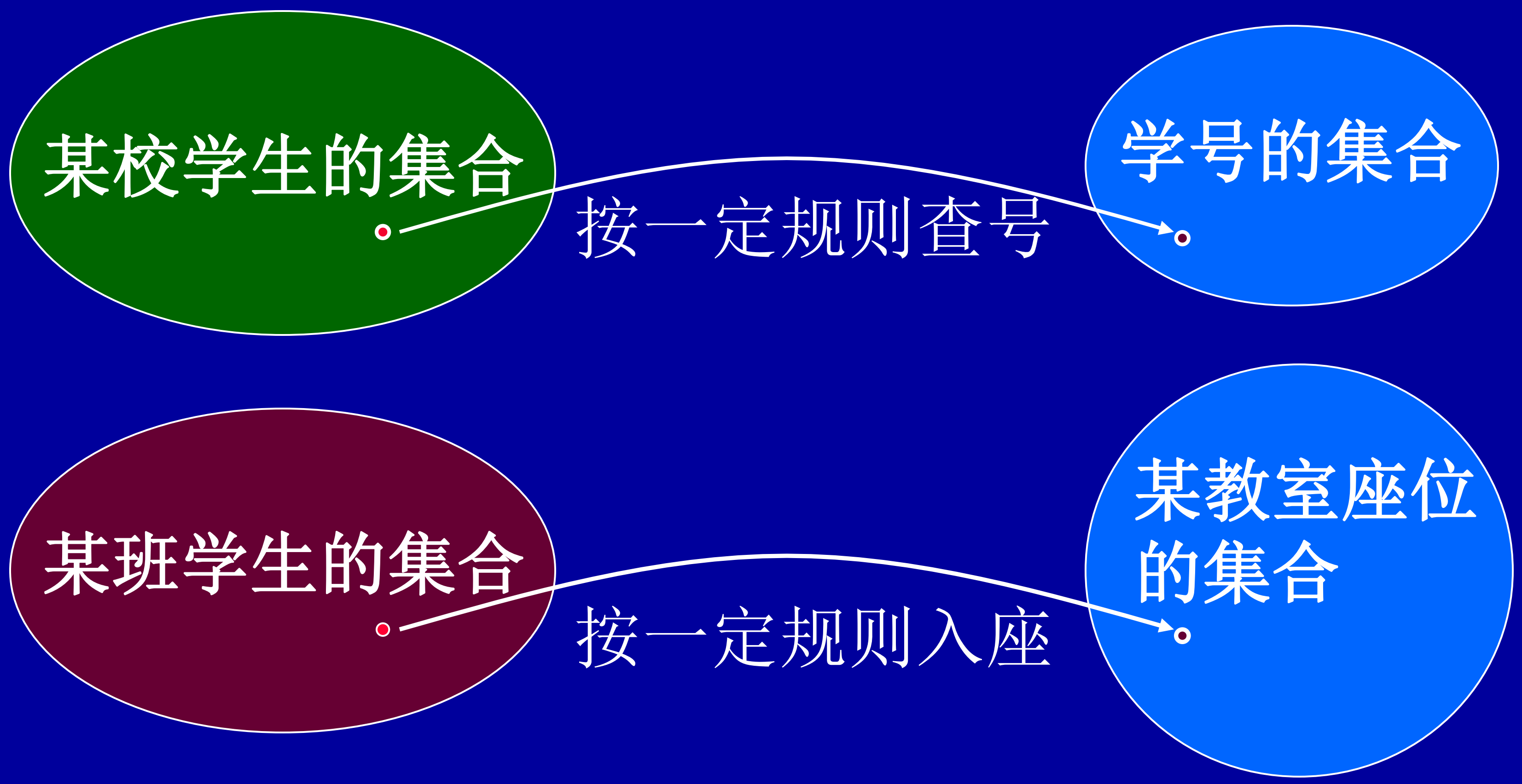
其中, a 称为邻域中心 , δ 称为邻域半径 .

左 δ邻域： $(a-\delta,a)$,　**右 δ邻域：** $(a,a+\delta)$.

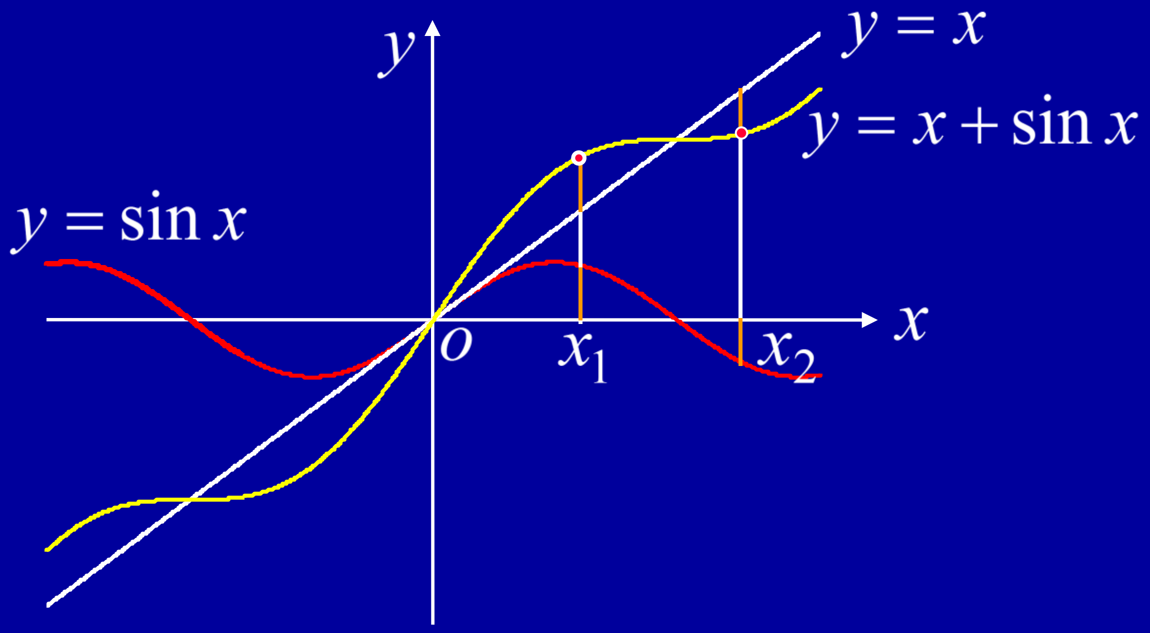
二、 映射与函数

1. 映射的概念

引例1.



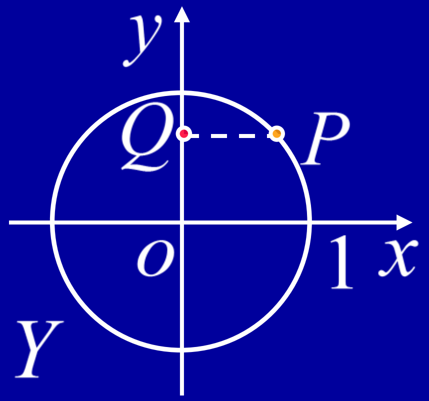
引例2. $\forall x \in \mathrm{R} \xrightarrow{y = x + \sin x} y \in \mathrm{R}$



引例3. $C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ (点集)

$Y = \{(0, y) \mid -1 \le y \le 1\}$ (点集)

$\forall$点 $P \in C \xrightarrow[\text{向 } y \text{ 轴投影}]{}$ 投影点 $Q \in Y$



定义4 设 X, Y 是两个非空集合, 若存在一个对应规则 f, 使得 $\forall x \in X$, 有唯一确定的 $y \in Y$ 与之对应, 则称 f 为从 X 到 Y 的**映射**, 记作 $f: X \to Y$.

元素 y 称为元素 x 在映射 f 下的 **像** ,

元素 x 称为元素 y 在映射 f 下的 **原像** .

集合 X 称为映射 f 的**定义域,记作$D_f=X$** ;

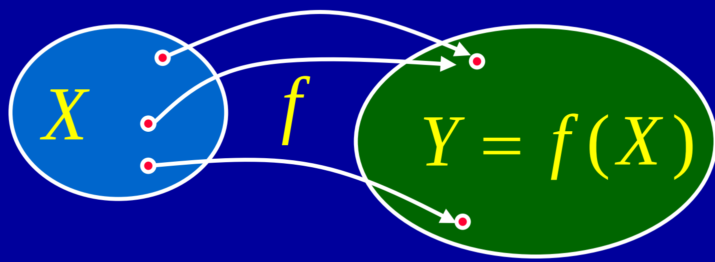
Y 的子集 $R_f = f(X) = \{ f(x) \mid x \in X \}$称为 f 的 **值域** .

注意: 1) 映射的三要素— 定义域 , 对应规则 , 值域 .

2) 元素 x 的像 y 是唯一的, 但 y 的原像不一定唯一 .

对映射 $f : X \to Y$

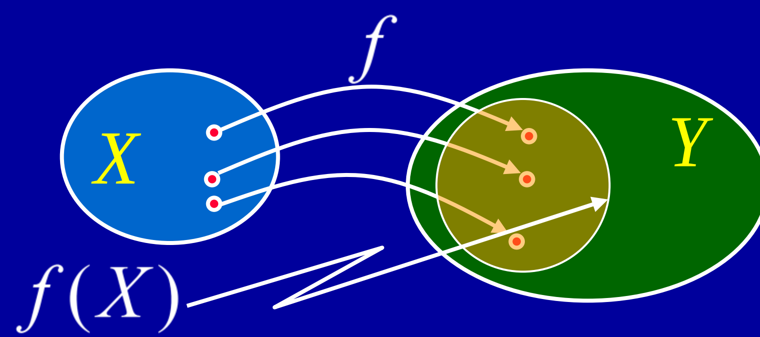
若 $f(X) = Y$, 则称 f 为**满射**; 引例2, 3



若 $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$, 有

$$f(x_1) \neq f(x_2)$$

则称 f 为**单射**; 引例2



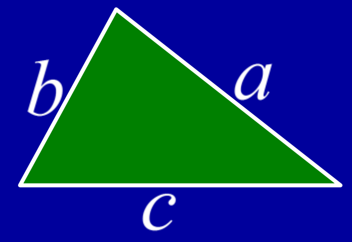
若 f 既是满射又是单射, 则称 f 为**双射** 或**一一映射**.

引例2

例1. $\forall$三角形$\in\Delta$(三角形集合)

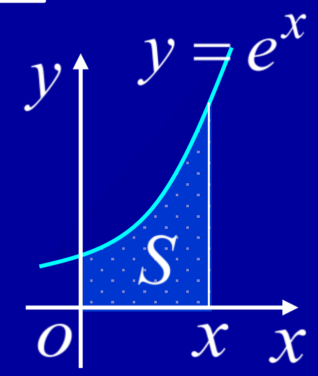
$\Big\downarrow$ 海伦公式

Δ面积 $S\in(0,+\infty)$ **(满射)**



例2. 如图所示, $\forall\, x\in[0,+\infty)$

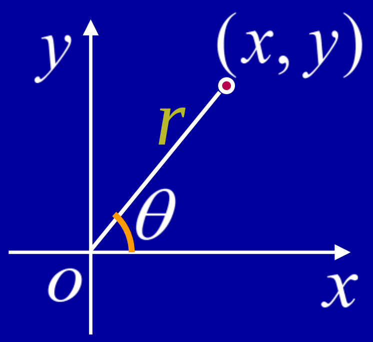
对应阴影部分的面积 $S\in[0,+\infty)$



则在数集 $[0,+\infty)$自身之间定义了一种映射 **(满射)**

例3. 如图所示, 则有

$$f:\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$$



$$(r,\theta)\in[0,+\infty)\times[0,2\pi)\xmapsto{\ f\ }(x,y)\in\mathrm{R}^2$$ **(满射)**

思考题

1\. 设 $f: R \to (0,+\infty)$, 对每个 $x \in R$, $f(x)=x^2$.

问f是否为一个映射? 因$f(0) \notin (0,+\infty)$,故f不是映射.

2\. 设 $f: R \to R$, 对每个 $x \in R$, $f(x)=x^2$.

问f是否为一个映射? f是映射,但不是满射.

3\. 设 $f: R \to [0,+\infty)$ 对每个$x \in R$, $f(x)=x^2$.

问f是否为一个映射? f是映射,同时是满射,但不是单射.

例4. 设 $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$, 对每个 $x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $f(x)=\sin x$.

问f是否为一个映射?

f是映射,同时是满射,又是单射(一一映射或双射).

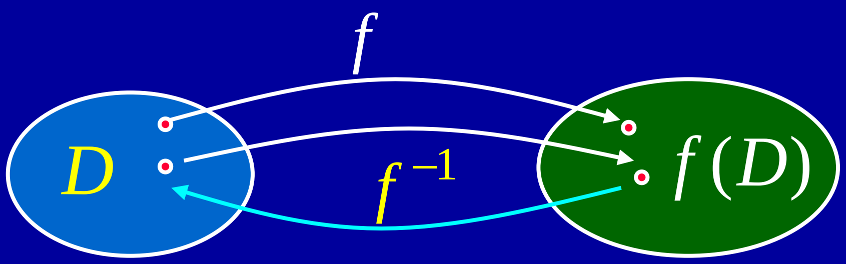
2. 逆映射与复合映射

(1) 逆映射的定义

定义5 若映射 $f : D \to f(D)$ 为单射, 则存在一新映射

$f^{-1} : f(D) \to D$, 使 $\forall y \in f(D), f^{-1}(y) = x$, 其中 $f(x) = y$,

称此映射 f^{-1} 为 f 的逆映射 .



习惯上, $y = f(x), x \in D$

的逆映射记成

$$y = f^{-1}(x) \; , x \in f(D)$$

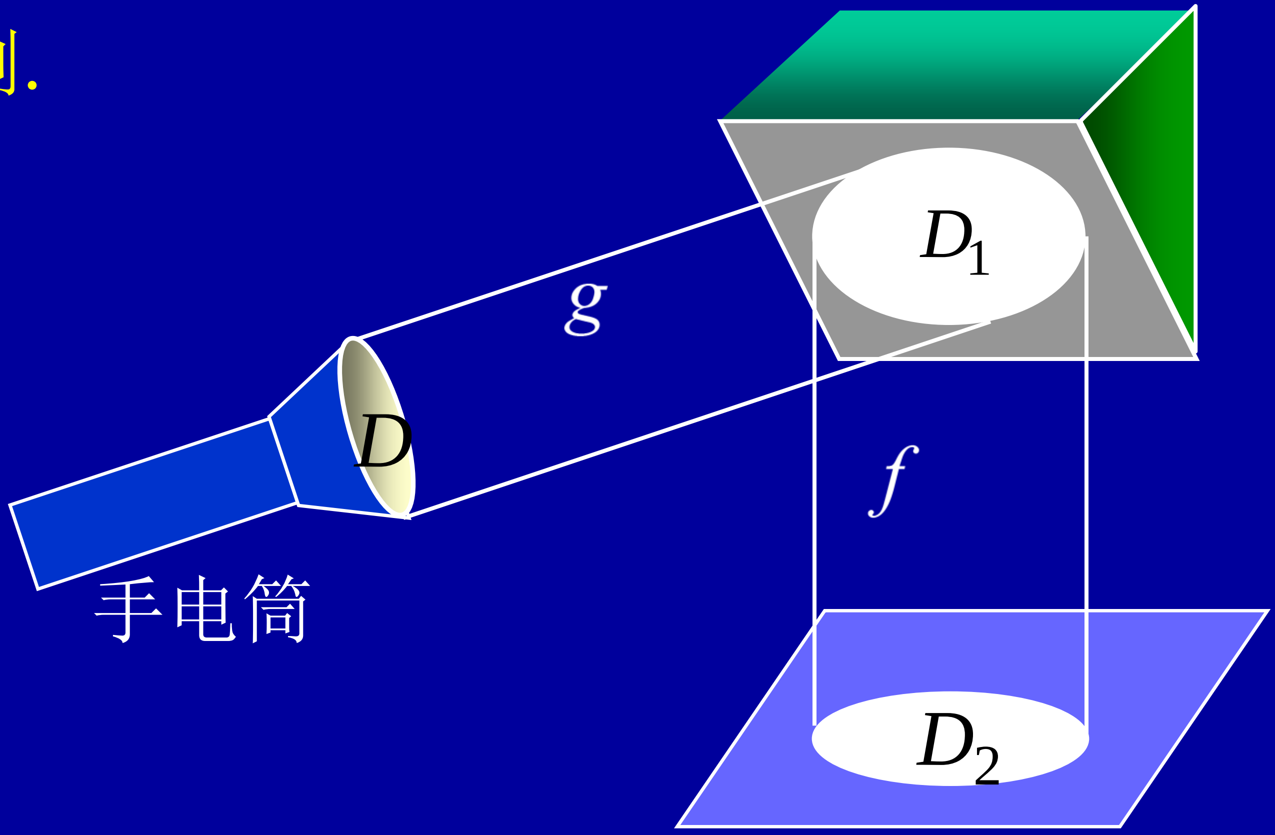
例如, 映射 $y = x^2, x \in (-\infty, 0]$, 其逆映射为

$$y = -\sqrt{x}, \quad x \in [\, 0, +\infty \,)$$

问例4是否存在逆映射?

(2) 复合映射

引例.



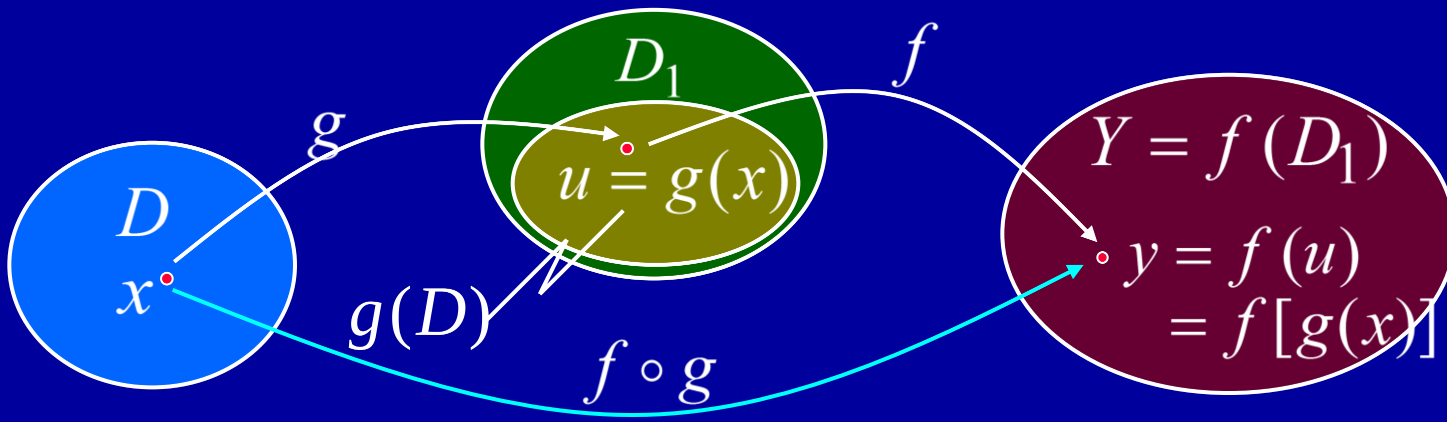
$$D \xrightarrow{\text{复合映射}} D_2$$

定义6 设有映射链

$$\forall x \in D \xmapsto{\quad g \quad} u = g(x) \in g(D)$$

$$\forall u \in D_1 \xmapsto{\quad f \quad} y = f(u) \in Y = f(D_1)$$

则当 $g(D) \subset D_1$ 时, 由上述映射链可定义由 D 到 Y 的复合映射 , 记作 $y = f[g(x)]$, 或 $f \circ g(x), x \in D$.



注意: 构成复合映射的条件 $g(D) \subset D_1$ 不可少.

以上定义也可推广到多个映射的情形.

例5. 设有映射

$g: \mathrm{R} \to [-1,1]$, 对每个 $x \in \mathrm{R}$, 有 $g(x) = \sin x$,

以及映射,

$f:[-1,1] \to [0,1]$, 对每个 $u \in [-1,1]$, 有 $f(u) = \sqrt{1-u^2}$.

由于 $R_g = D_f = [-1,1]$,

故 g 和 f 构成复合映射 $f \circ g: R \to [0,1]$

对每个 $x \in R$, 有 $f[g(x)] = \sqrt{1-\sin^2 x}$.

3. 函数的概念

3.1 函数的概念

定义7 设数集 $D \subset \mathrm{R}$，则称映射 $f: D \to \mathrm{R}$ 为定义在 D 上的函数，记为

定义域

$$y = f(x),\ x \in D$$

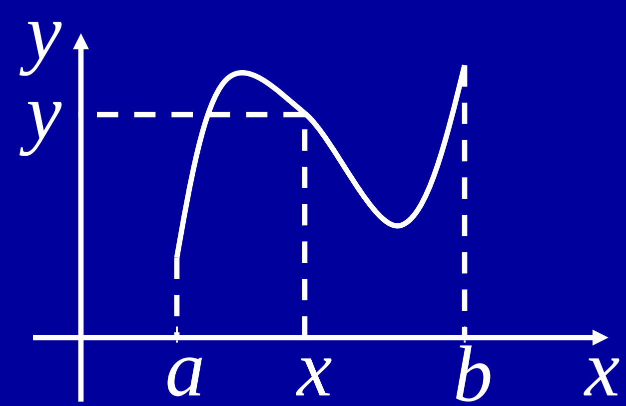
因变量

自变量

$f(D)$ 称为值域

函数图形:

$$C = \{(x, y) \mid y = f(x),\ x \in D\}$$



$(D = [a, b])$

$$\forall x \in D \xmapsto{\ f\ } y \in f(D) = \{\, y \mid y = f(x), x \in D \,\}$$

(定义域) (对应规则) (值域)

- **定义域** —— 使表达式及实际问题都有意义的自变量集合.
- **对应规律**的表示方法：解析法、图象法、列表法

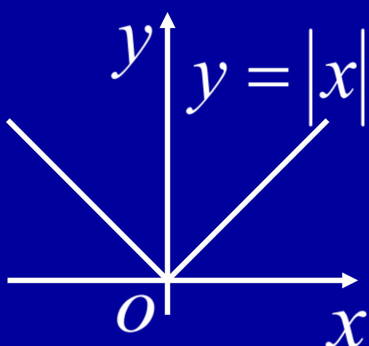
例如, 反正弦主值 $y = f(x) = \arcsin x$

定义域 $D = [-1, 1]$, 值域 $f(D) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

例5 绝对值函数 $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

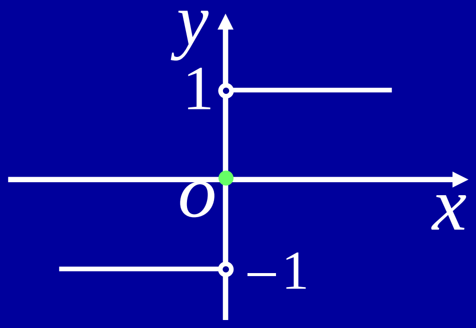
定义域 $D = \mathrm{R}$

值　域 $f(D) = [0, +\infty)$



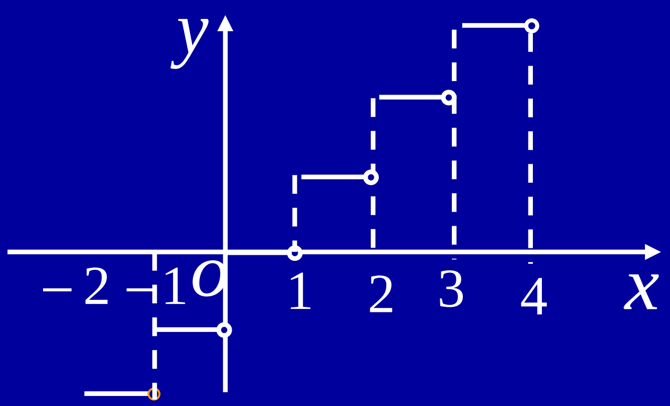
例6 符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & 当\ x > 0 \\ 0, & 当\ x = 0 \\ -1, & 当\ x < 0 \end{cases}$$



例7 取整函数

$$y = [x] = n,\ 当\ n \le x < n+1,\ n \in Z$$



例8 已知函数 $y=f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\le x\le 1\\ 1+x, & x>1\end{cases}$

求 $f(\frac{1}{2})$ 及 $f(\frac{1}{t})$, 并写出定义域及值域 .

解: $f(\frac{1}{2})=2\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$

$$f(\tfrac{1}{t})=\begin{cases}1+\dfrac{1}{t}, & 0<t<1\\ \dfrac{2}{\sqrt{t}}, & t\ge 1\end{cases}$$

$t\le 0$时
函数无定义

定义域 $D=[0,+\infty)$

值　域 $f(D)=[0,+\infty)$

生物学中几个重要的函数

例11(酶动力模型)

生命物质的化学反应几乎都是在酶的参与下进行,酶在反应过程中起催化作用,成为某种化学反应的必要条件.在酶动力学研究中,酶的反应速度y是基底浓度x的函数.描述这一关系的是Michaelis-Meten模型

$$y=\frac{\theta_1 x}{\theta_2+x}$$

其中θ_1是酶反应的渐近速度,可由最大的观测值y_{max}来估计,在图象上,θ_1表示当$x\to\infty$时y的渐近值;常数θ_2表示半浓度,当浓度达到该值时,速度是其最大值的一半.

生物学中几个重要的函数

例12 (Logistic 增长模型)

当自然资源和环境对种群增长起阻滞作用时,Logistic曲线是描述种群增长的理想模型.物种从现在(t=0,y=y(0))起到t时刻后的数量y可表示为

$$y = \frac{A}{1+Be^{-kt}} \quad (k>0)$$

其中常数A是物种的渐近值,称为饱和系数(或所容纳的最大物种量),可由最大的观测值y_{max}来估计,在图象上,A表示当$t\to\infty$时y的渐近值;$\frac{A-y}{A}$的生物学含义是剩余空间或称为沿未利用的增长机会;k为生命系数.

生物学中几个重要的函数

例13 (细菌繁殖、药物吸收、放射性元素等模型)

一个质量为m_0的细胞在理想的环境中生长,它的质量m可以看成是时间t的函数

$$m(t)=m_0\mathrm{e}^{kt}$$

其中当$t=0$时,$m=m_0$称为初始状态,

而k称为细胞的相对增长率.

三、函数的几种特性

设函数 $y = f(x)$, $x \in D$, 且有区间 $I \subset D$.

1. 有界性　(定义8)

$\forall x \in D, \exists M > 0$, 使 $|f(x)| \le M$, 称 $f(x)$**为有界函数.**

$\forall x \in I, \exists M > 0$, 使 $|f(x)| \le M$, 称 $f(x)$**在 I 上有界.**

说明: 还可定义有上界、有下界、无界

2. 单调性 (定义9)

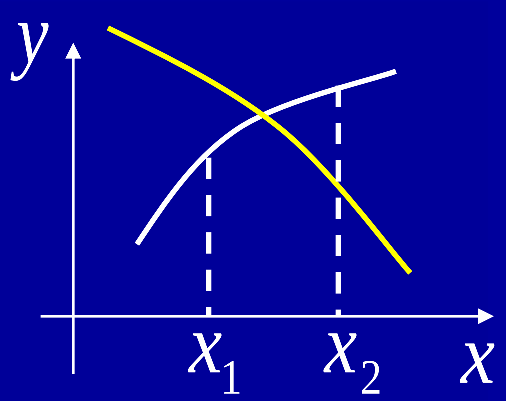
$\forall x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2$ 时,

若 $f(x_1) < f(x_2)$, 称 $f(x)$ 为 I 上的

单调增函数 ;

若 $f(x_1) > f(x_2)$, 称 $f(x)$ 为 I 上的

单调减函数 .

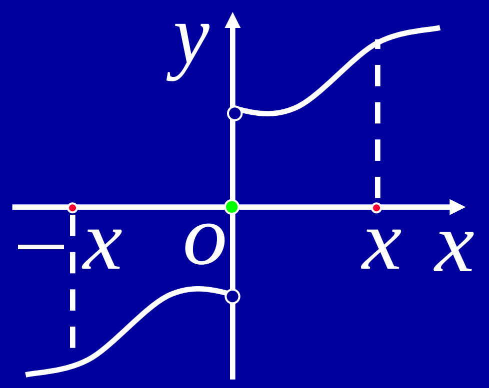


3. 奇偶性 (定义10)

$\forall x \in D$, 且有 $-x \in D$,

若 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为**偶函数;**

若 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为**奇函数.**

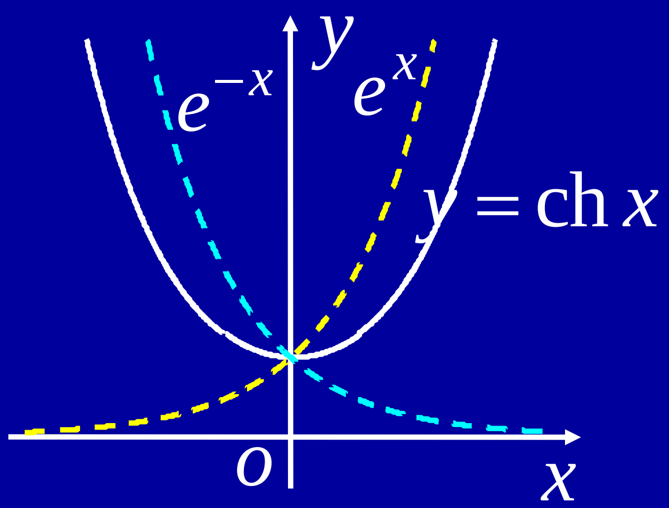


说明: 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 有定义, 则当 $f(x)$ 为**奇函数**时, 必有 $f(0)=0$.

例如,

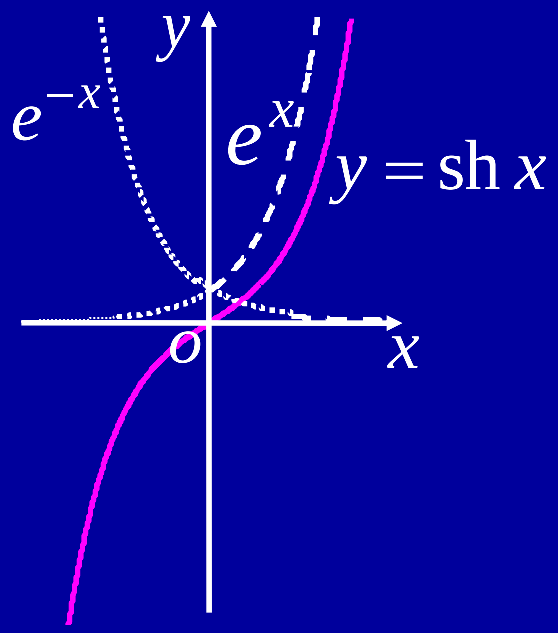
$$y = f(x) = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} \text{ 偶函数}$$

$$\overset{\text{记}}{=} \operatorname{ch} x \quad \text{双曲余弦}$$



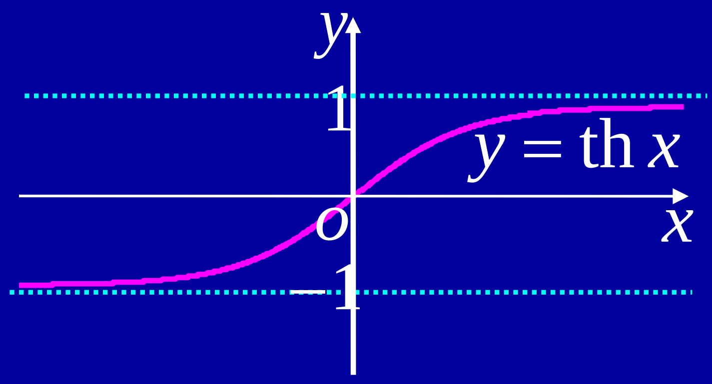
又如, $y = f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$　奇函数

$\stackrel{\text{记}}{=} \operatorname{sh} x$　双曲正弦



再如, $y = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$　奇函数

$\stackrel{\text{记}}{=} \operatorname{th} x$　双曲正切



例14 判断函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$的奇偶性.

解 $f(-x)=\ln[-x+\sqrt{1+(-x)^2}]$

$$=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})$$

$$=\ln\frac{(\sqrt{1+x^2}-x)(x+\sqrt{1+x^2})}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\ln\frac{(\sqrt{1+x^2})^2-x^2}{x+\sqrt{1+x^2}}=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

$$=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=f(x)$$

例15 判断函数 $f(x)=\begin{cases}2+3x, & x\le 0,\\ 2-3x, & x>0\end{cases}$ 的奇偶性.

解

$$f(-x)=\begin{cases}2+3(-x), & (-x)\le 0\\ 2-3(-x), & (-x)>0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2-3x, & x\ge 0\\ 2+3x, & x<0\end{cases}$$

$$=f(x)$$

故 $f(x)$ 是偶函数.

习作题 设$f(x)$是定义在区间$(-a, a)$上的函数.

作函数

$$g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}, x\in(-a, a)$$

$$h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}, x\in(-a, a)$$

（1）判别函数$g(x)$、$h(x)$的奇偶性.

(2)函数$f(x)$与$g(x)$、$h(x)$有何关系?

(3)您能得到一般的结论吗?

例18 设 $f(0)=0$ 且 $x\neq 0$ 时 $a\,f(x)+b\,f(\frac{1}{x})=\frac{c}{x}$, 其中 a, b, c 为常数, 且 $|a|\neq|b|$, 证明 $f(x)$ 为奇函数 .

证: 令 $t=\dfrac{1}{x}$, 则 $x=\dfrac{1}{t}$, $a\,f(\frac{1}{t})+b\,f(t)=ct$

由 $$\begin{cases} a f(x)+b f(\frac{1}{x})=\frac{c}{x} \\ a f(\frac{1}{x})+b f(x)=cx \end{cases}$$

消去 $f(\frac{1}{x})$, 得

$$f(x)=\frac{c}{b^2-a^2}\left(bx-\frac{a}{x}\right)\quad (x\neq 0)$$

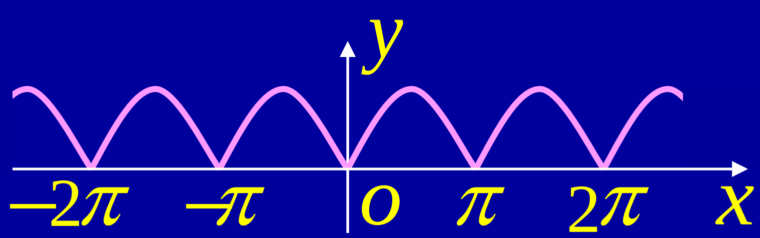
显然 $f(-x)=-f(x)$, 又 $f(0)=0$, 故 $f(x)$ 为奇函数 .

4. 周期性 (定义11)

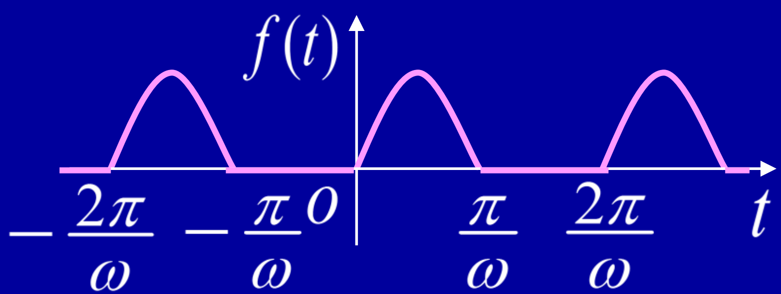
$\forall x \in D, \exists l > 0$, 且 $x + l \in D$, 若

$$f(x+l) = f(x)$$

则称 $f(x)$为周期函数, 称 l 为周期 (一般指最小正周期).



周期为 π



周期为 $\frac{2\pi}{\omega}$

注: 周期函数不一定存在最小正周期 .

例如, 常量函数 $f(x) = C$

狄里克雷函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$

例19. 设函数 $y=f(x),x\in(-\infty,+\infty)$ 的图形与 $x=a$, $y=b\ (a\neq b)$ 均对称, 求证 $y=f(x)$ 是周期函数.

证: 由 $f(x)$ 的对称性知

$$f(a+x)=f(a-x),\qquad f(b+x)=f(b-x)$$

于是
$$\begin{aligned}f(x)&=f[a+(x-a)]\\&=f[a-(x-a)]=f(2a-x)\\&=f[b+(2a-x-b)]\\&=f[b-(2a-x-b)]\\&=f[x+2(b-a)]\end{aligned}$$

故 $f(x)$ 是周期函数, 周期为 $T=2(b-a)$

四、复合函数和反函数

1. 复合函数 — 复合映射的特例

定义 13 设有函数链

$$y = f(u),\ u \in D_1 \qquad ①$$

$$u = g(x),\ x \in D, \quad 且\ g(D) \subset D_1 \qquad ②$$

则 $y = f[g(x)],\ x \in D$

称为由①, ②确定的**复合函数**, u 称为**中间变量**.

注意: 构成复合函数的条件 $g(D) \subset D_1$ 不可少.

例如 函数链 $y = \arcsin u$, $u = 2\sqrt{1 - x^2}$, 可定义复合函数

$$y = \arcsin 2\sqrt{1 - x^2}, \quad x \in D = [-1, -\tfrac{\sqrt{3}}{2}] \cup [\tfrac{\sqrt{3}}{2}, 1]$$

但函数链 $y = \arcsin u$, $u = 2 + x^2$ 不能构成复合函数 .

两个以上函数也可构成复合函数. 例如,

$$y=\sqrt{u}\,,\ u>0$$

$$u=\cot v\,,\ v\neq k\pi\ (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

$$v=\frac{x}{2},\ x\in(-\infty,+\infty)$$

可定义复合函数:

$$y=\sqrt{\cot\frac{x}{2}},\quad x\in(2k\pi\,,(2k+1)\pi\,],\quad n\in Z$$

$$k\pi<\frac{x}{2}\leq k\pi+\frac{\pi}{2}\text{时},\ \cot\frac{x}{2}\geq 0$$

练习　以下函数由哪些函数复合而成？

$(1)\ y=[\sin(\ln x)]^2$;　$(2)\ y=\ln(1+\sin x)$;

$(3)\ y=\ln^2[\sin x]$;　$(4)\ y=\sqrt{\ln(\cos x^2)}$.

解　$(1)\ y=u^2,\ u=\sin v,\ v=\ln x.$

$(2)\ y=\ln u, u=1+\sin x;$

$(3)\ y=u^2, u=\ln v, v=\sin x;$

$(4)\ y=u^{\frac{1}{2}}, u=\ln v, v=\cos w, w=x^2.$

例27. 设 $f(x)=\begin{cases} e^x, x<1, \\ x, \quad x\ge 1, \end{cases}$ $\varphi(x)=\begin{cases} x+2, x<0, \\ x^2-1, x\ge 0, \end{cases}$ 求 $f[\varphi(x)]$.

解: 由已知条件，得 $f[\varphi(x)]=\begin{cases} e^{\varphi(x)}, & \varphi(x)<1, \\ \varphi(x), & \varphi(x)\ge 1. \end{cases}$

当 $\varphi(x)<1$时,有

(1)当$x<0$时, $\varphi(x)=x+2<1$, 得 $x<-1$;

(2)当$x\ge 0$时, $\varphi(x)=x^2-1<1$, 得 $0\le x<\sqrt{2}$.

当$\varphi(x)\ge 1$, (1)当$x<0$时, $\varphi(x)=x+2\ge 1$, 得 $-1\le x<0$;

(2)当$x\ge 0$时, $\varphi(x)=x^2-1\ge 1$, 得 $x\ge\sqrt{2}$.

综上所述，得

$$y=\begin{cases} e^{x+2}, & x<-1 \\ x+2, & -1\le x<0, \\ e^{x^2-1}, & 0\le x<\sqrt{2}, \\ x^2-1, & x\ge\sqrt{2}. \end{cases}$$

2. 反函数的概念及性质

定义12 若函数 $f: D \to f(D)$ 为单射, 则存在逆映射

$$f^{-1}: f(D) \to D$$

称此映射 f^{-1} 为 f 的**反函数**.

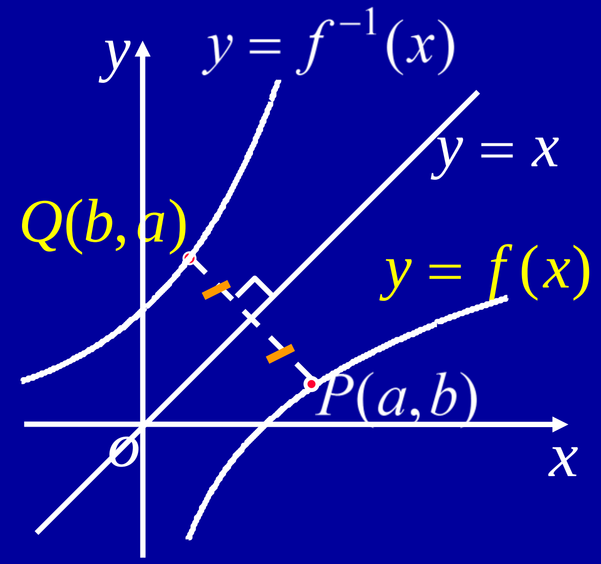
习惯上, $y = f(x), x \in D$ 的反函数记成

$$y = f^{-1}(x) \ , x \in f(D)$$

性质:

1) $y = f(x)$ 单调递增 (减) 其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 存在, 且也单调递增 (减) .

2) 函数 $y = f(x)$ 与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称 .



例如 ,

指数函数 $y = e^x, x \in (-\infty, +\infty)$

对数函数 $y = \ln x \,, x \in (0, +\infty)$

互为反函数 ,

它们都单调递增, 其图形关于直线 $y = x$ 对称 .

重要结论： 一个函数$f(x)$若有反函数，则有恒等式

$$f^{-1}[f(x)] \equiv x,\quad \forall x \in D_f .$$

相应地有，

$$f[f^{-1}(y)] \equiv y,\ \forall y \in f(D).$$

例如函数 $y = f(x) = \frac{3}{4}x + 3, x \in R$ 的反函数为

$$x = f^{-1}(y) = \frac{4}{3}(y-3),\ y \in R,$$

并且有

$$f^{-1}[f(x)] = \frac{4}{3}[\ f(x) - 3\ ]$$

$$= \frac{4}{3}\left[\left(\frac{3}{4}x + 3\right) - 3\right] \equiv x, x \in R$$

同理可得

$$f[f^{-1}(y)] = \frac{3}{4}\left[\frac{4}{3}(y-3)\right] + 3 \equiv y, y \in R.$$

思考: $\mathrm{e}^{\ln f(x)} = ?$ （其中$f(x)>0$）

$$[f(x)]^{g(x)} \overset{?}{=} \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}, \text{其中} f(x)>0.$$

例28 证明函数 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$的反函数就是其本身.

证 显然函数的定义域为$\{x \mid x\neq -1\}$. 又因为

$$y=\frac{(-1-x)+2}{1+x}=-1+\frac{2}{1+x},$$

显然 $\dfrac{2}{1+x}\neq 0$, 故 $y\neq -1$. 由 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$,

可得 $y(1+x)=1-x$, 整理，得 $(y+1)x=1-y$,

于是 $$x=\frac{1-y}{1+y}(y\neq -1).$$

例29. 求 $y=\begin{cases} x^2, & -1\le x<0 \\ \ln x, & 0<x\le 1 \\ 2e^{x-1}, & 1<x\le 2 \end{cases}$ 的反函数及其定义域.

解: 当 $-1\le x<0$ 时, $y=x^2\in(0,1]$,

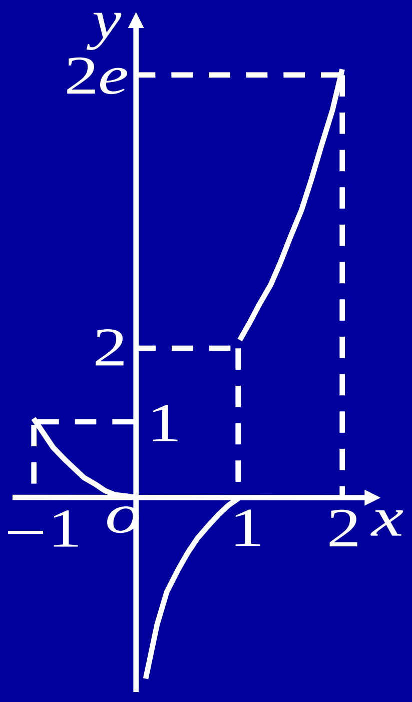
则 $x=-\sqrt{y},\ y\in(0,1]$

当 $0<x\le 1$ 时, $y=\ln x\in(-\infty,0]$,

则 $x=e^y,\ y\in(-\infty,0]$

当 $1<x\le 2$ 时, $y=2e^{x-1}\in(2,2e]$,

则 $x=1+\ln\frac{y}{2},\ y\in(2,2e]$



反函数 $y=\begin{cases} e^x, & x\in(-\infty,0] \\ -\sqrt{x}, & x\in(0,1] \\ 1+\ln\frac{x}{2}, & x\in(2,2e] \end{cases}$

定义域为

$(-\infty,1]\cup(2,2e]$

五、基本初等函数与初等函数

1. 基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数

2. 初等函数

由常数及基本初等函数经过有限次四则运算和复合步骤所构成，并可用一个式子表示的函数，称为初等函数．否则称为非初等函数．

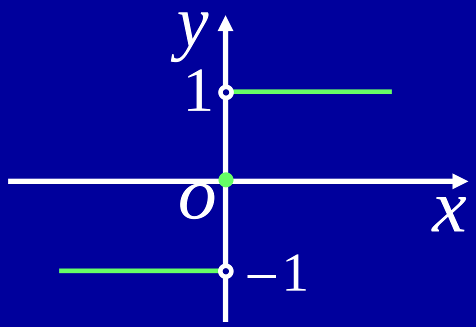
例如，$y=\begin{cases} x, & x\ge 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$ 可表为 $y=\sqrt{x^2}$，故为初等函数．

又如，双曲函数与反双曲函数也是初等函数．

非初等函数举例:

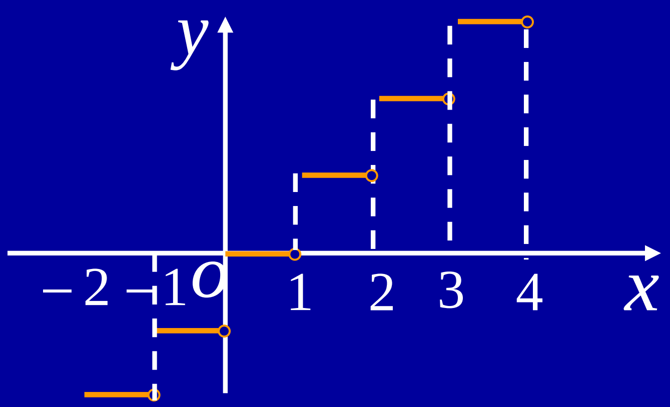
符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & 当\ x > 0 \\ 0, & 当\ x = 0 \\ -1, & 当\ x < 0 \end{cases}$$



取整函数

$$y = [x] = n,\ 当\ n \le x < n+1,\ n \in Z$$



六、建立函数关系

例30 在一个容器里装有1 kg的纯酒精,如果以每秒1/10kg的速度往容器里注水,求:

(1)酒精浓度关于时间t的函数;

(2)从t_1=2s 到t_2=5s的时间间隔内,酒精浓度的平均速度.

解 (1)注水t秒后容器内混合液为$(1+\frac{t}{10})kg$,内含$1kg$酒精,

故混合液中酒精的浓度为$$y=\frac{1}{1+\frac{t}{10}}=\frac{10}{10+t}.$$

(2)$t=2$秒时,酒精的浓度为$y=\frac{10}{10+2}=\frac{5}{6}$,

$t=5$秒时,酒精的浓度为$y=\dfrac{10}{10+5}=\dfrac{2}{3}$,

从t_1=2s 到t_2=5s的时间间隔内,酒精浓度的改变量.

$$y_2-y_1=\frac{2}{3}-\frac{5}{6}=-\frac{1}{6},$$

于是,从t_1=2s 到t_2=5s的时间间隔内,酒精浓度下降的平均速度为:

$$\bar{v}=\frac{y_2-y_1}{t_2-t_1}=-\frac{1}{18}.$$

这里负号表示酒精浓度减少.

例31 在细胞合成蛋白质的过程中,蛋白质的质量依照下面的公式随时间而增长:

$$M = p + qt + rt^2 \ (p, q, r\text{都是常数}),$$

求从时刻t_1(单位:小时)到t_2时刻间隔中,合成蛋白质的平均速度.

解 由题意知,t_1与t_2时刻蛋白质的质量分别为

$$M_1 = p + qt_1 + rt_1^2, \ M_2 = p + qt_2 + rt_2^2,$$

于是从t_1到t_2的时间间隔内,蛋白质质量的增加量为

$$M_2 - M_1 = (t_2 - t_1)[q + r(t_2 + t_1)],$$

故从t_1到t_2的时间间隔内,蛋白质质量增加的平均速度为

$$\bar{v}=\frac{M_2-M_1}{t_2-t_1}$$

$$=\frac{(t_2-t_1)[q+r(t_2+t_1)]}{t_2-t_1}$$

$$=q+r(t_2+t_1).$$

例33 某运输公司规定货物的吨千米运价为:在a千米内,每千米k元,超过部分每千米(4/5)k元.求运价m与里程s之间的函数关系.

解 依题意,可列出函数关系如下:

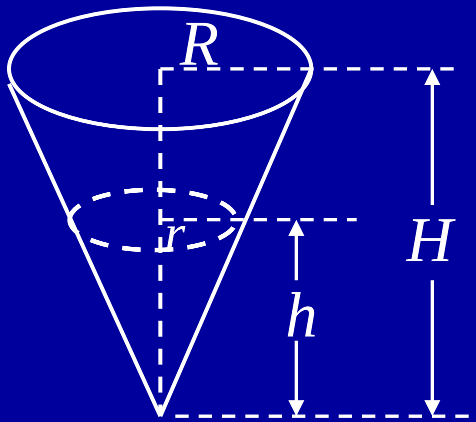
$$m=\begin{cases} ks, & 0<s\le a, \\ ka+\dfrac{4}{5}k(s-a), & s>a. \end{cases}$$

这里运价m与里程s的函数关系用分段函数表示,

定义域为: $(0,+\infty)$.

例34 有一圆锥形容器,上口半径R= 7 cm,高H=14cm. 如果以每分钟 5cm^{3}的速度往容器里注入溶液,求:容器内液体的深度h关于时间t的函数关系

解 设液面的高度为h时,液面半径为r. 由圆锥形体积的计算公式可得溶液的体积V与r、h的关系为



$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

由于 $\frac{r}{R}=\frac{h}{H}$, 即 $r=\frac{h}{H}R$,

代入上式,得 $V=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{H}R\right)^2 h=\frac{\pi R^2 h^3}{3H^2}$,

于是 $h=\sqrt[3]{\dfrac{3H^2V}{\pi R^2}}$.

由已知条件知，注入液体从t分钟后，容器内溶液的体积$V=5t$,

以$R=7$，$H=14$代入上式，得

$$h=\sqrt[3]{\frac{3\times 5t\times 14^2}{\pi\times 7^2}}=\sqrt[3]{\frac{60t}{\pi}}.$$

内容小结

1. 集合及映射的概念

2. 函数的定义及函数的二要素 $\begin{cases} \text{定义域} \\ \text{对应规律} \end{cases}$

3. 函数的特性 —— 有界性, 单调性,
   奇偶性, 周期性

4. 初等函数的结构