第三节　函数的连续性

一、连续函数的概念

二、 函数的间断点

三、初等函数的连续性

四、闭区间上连续函数的性质

一、 函数连续的概念

1. 增量

设变量u从初值u_1变到终值u_2,则称u_2-u_1为变量u的增量，记作

$$\Delta u = u_2 - u_1 .$$

定义1 设函数$y=f(x)$在点x_0的某一邻域内有定义，当自变量从x_0变到x，则称

$$\Delta x = x - x_0$$

为自变量x的增量，

对应地，称

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$$

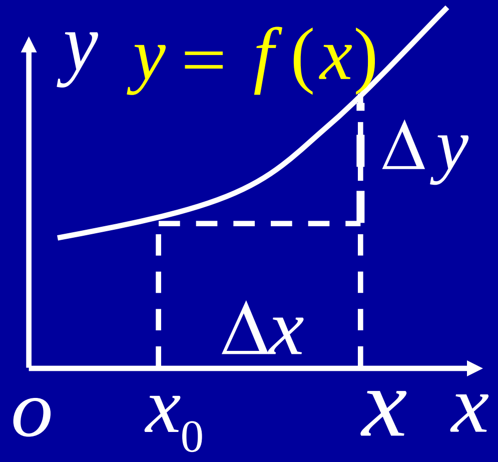
为函数$y=f(x)$的增量.

2. 函数在一点连续的定义

定义2 设函数$f(x)$在点x_0的某邻域内有定义，如果当自变量的增量趋于零时，对应的函数增量也趋于零，即

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

那么就称函数$y = f(x)$在点x_0处连续.



精确表达为

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$$

当 $|x - x_0| = |\Delta x| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - f(x_0)| = |\Delta y| < \varepsilon$$

设 $x = x_0 + \Delta x$, 当$\Delta x \to 0$时, 有$x \to x_0$.

由于 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)]$

因此,当$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$时, 有 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

定义3 设函数$y = f(x)$在x_0的某邻域内有定义, 且

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

则称函数 $f(x)$在x_0点连续.

可见,函数 $f(x)$在x_0点连续. 连续必须具备下列条件:

(1) $f(x)$在点x_0有定义,即$f(x_0$）存在;

(2) 极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在; (3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

例68 讨论函数 $y=\sin x$在点$x=0$处的连续性.

解法一 **因为**

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\sin x=0=f(0)$$

所以函数 $y=\sin x$在点$x=0$处是连续的.

解法二 **因为**

$$\Delta y=\sin(0+\Delta x)-\sin 0=\sin\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\sin\Delta x=0,$$

所以函数 $y=\sin x$在点$x=0$处是连续的.

例69 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

在点x=0处的连续性.

解法一 **因为** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0),$

所以函数在点x=0处连续.

解法二 **因为** $\Delta y=(\Delta x)^2\sin\dfrac{1}{\Delta x},\quad \left|\sin\dfrac{1}{\Delta x}\right|\leq 1,$

且当$\Delta x\to 0$时,$(\Delta x)^2$为无穷小量,

故 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0,$

所以函数在点x=0处连续.

例70 讨论函数 $f(x)=|x|$ 在点x=0处的连续性.

解 **因为**

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x=0,$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(-x)=0,$$

由极限存在的充分必要条件，得

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=0,$$

又因为 $f(0)=0,$

故 $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0),$

所以函数在点x=0处连续.

由极限存在的充分必要条件，得

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

成立的充分必要条件是

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0).$$

由此，可得函数在某点处左连续和右连续的定义.

定义4 如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$,

则称函数$f(x)$在点x_0处左连续；

如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$,

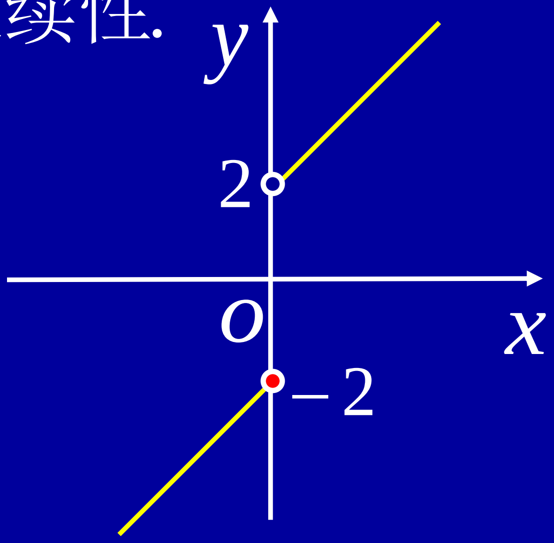
则称函数$f(x)$在点x_0处右连续.

定理1　函数$y=f(x)$在点x_0处连续的充分必要条件是：函数$f(x)$在点x_0处既是左连续又是右连续，即

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0).$$

例71　讨论函数

$$y=f(x)=\begin{cases} x+2, & x>0 \\ x-2, & x\le 0 \end{cases}$$ 在$x=0$处的连续性.



解　因为

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+2)=2,$$

而$f(0)=-2\ne \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$,

因此函数在$x=0$处不连续 .

例72　已知函数

$$y = f(x) = \begin{cases} 2x + a, & x < 0 \\ x^2 + 2, & x \geq 0 \end{cases}$$

在$x = 0$处连续性,求常数a.

解　因为　$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (2x + a) = a,$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x^2 + 2) = 2 = f(0),$$

且函数在x=0处连续 .

由函数连续的充分必要条件，有

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0),$$

即　$a = 2.$

3. 函数在区间上连续的定义

定义5 若$f(x)$在某区间上每一点都连续，则称函数在该区间上连续，或称函数为该区间上的**连续函数**。

即若

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [f(x+\Delta x) - f(x)] = 0,$$

或者

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x) = f(x).$$

成立，称函数为该区间上的**连续函数**。

在闭区间$[a, b]$上的连续函数的集合记作$C[a, b]$.

例73 证明函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续 .

证: $\forall x\in(-\infty,+\infty)$

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})$$

由于 $\left|\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\right|\le 1$ 为有界量,

而当 $\Delta x\to 0$ 时, $2\sin\frac{\Delta x}{2}$ 为无穷小量,

于是由无穷小的性质，可得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})=0,$$

这说明 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续 .

同样可证: 函数 $y=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续 .

例74.设函数$f(x)=\dfrac{x}{a+\mathrm{e}^{bx}}$在$(-\infty,+\infty)$内连续,

且$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$,则常数$a,b$应满足

$(A)a<0,b<0.$ $(B)a>0,b>0.$ $(C)a\le 0,b>0.$ $(D)a\ge 0,b<0.$

【分析】要确定所给函数中的未知参数的变化范围使之连续,只需要使分母无零点即可,然后再根据极限存在确定另一参数

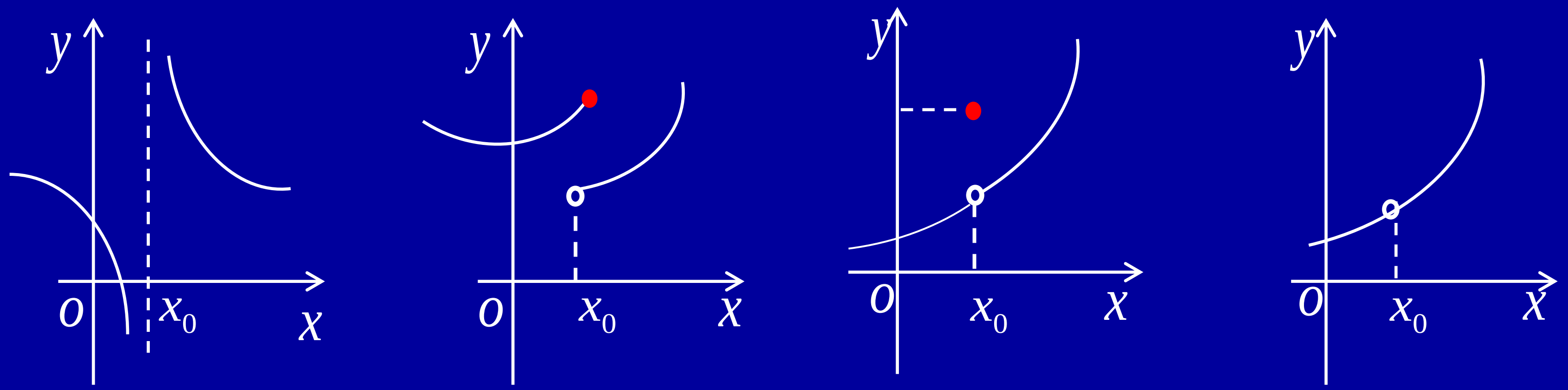
解　因$f(x)$连续, 故$a+e^{bx}\neq 0$,　而$e^{bx}>0$, 因此只要$a\geq 0$即可.

再由$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{a+e^{bx}}=0$,

可知$x\to-\infty$时,$a+e^{bx}$必为无穷大(否则极限不存在),

此时需$b<0$,故(D)入选.

二、 函数的间断点



(a) (b) (c) (d)

左、右极限是∞，极限不存在.

左、右极限存在，但不相等.

左、右极限存在且相等，但不等于函数在该点的函数值.

函数在x_0处无定义．极限存在

设 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义，则下列情形之一函数 $f(x)$ 在点 x_0 不连续：

(1) 函数 $f(x)$ 在 x_0 无定义；

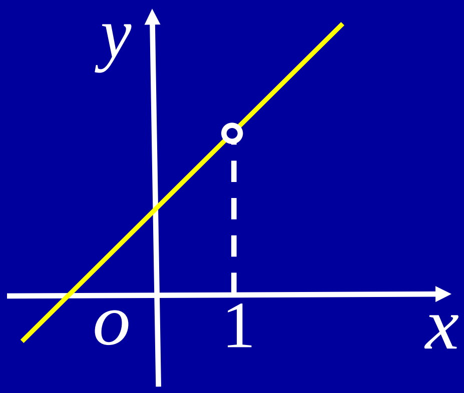
(2) 函数 $f(x)$ 在 x_0 虽有定义，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在；

(3) 函数 $f(x)$ 在 x_0 虽有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，但

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

这样的点 x_0 称为**间断点**。

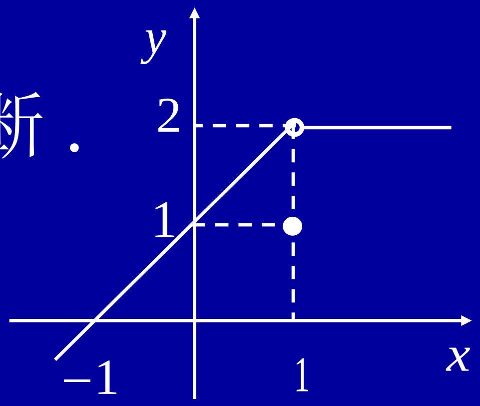
例75　函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 在x=1处间断.



$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2,$$

即函数在点x=1处极限存在,但函数在该点没有定义.

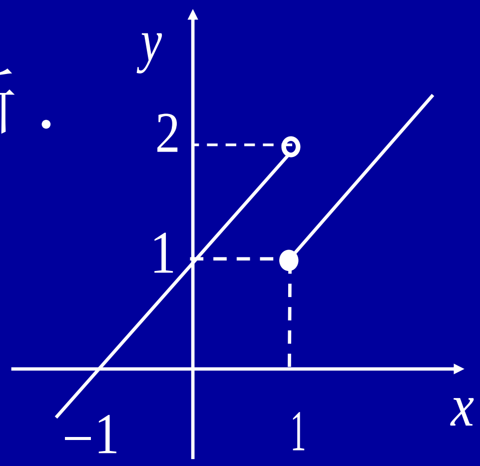
例76　函数 $f(x)=\begin{cases} x+1, x<1 \\ 1, \quad x=1 \\ 2, \quad x>1 \end{cases}$ 在x=1处间断.



$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(x+1)=2, \\ &\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} 2=2, \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x)=2,$$

但 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2\neq f(1)=1.$

例77 函数 $f(x)=\begin{cases} x+1, x<1 \\ x, \quad x\geq 1 \end{cases}$ 在x=1处间断.

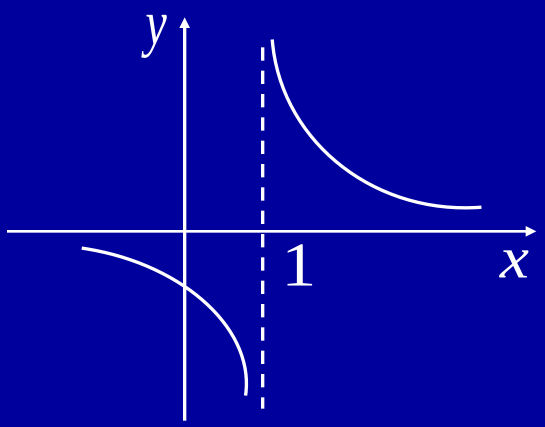


$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x+1) = 2,$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x = 1,$$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$不存在.

例78 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ 在x=1处间断.



$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty,$$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$不存在.

间断点分类:

第一类间断点:

$f(x_0^-)$ 及 $f(x_0^+)$ 均存在 ,

若 $f(x_0^-)=f(x_0^+)$，称 x_0 为可去间断点 .

若 $f(x_0^-)\neq f(x_0^+)$，称 x_0 为跳跃间断点 .

第二类间断点:

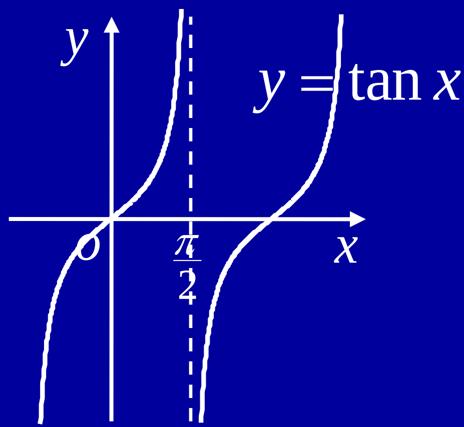
$f(x_0^-)$ 及 $f(x_0^+)$ 中至少一个不存在 ,

若其中有一个为 ∞, 称 x_0 为**无穷间断点** .

若其中有一个为振荡， 称 x_0 为**振荡间断点** .

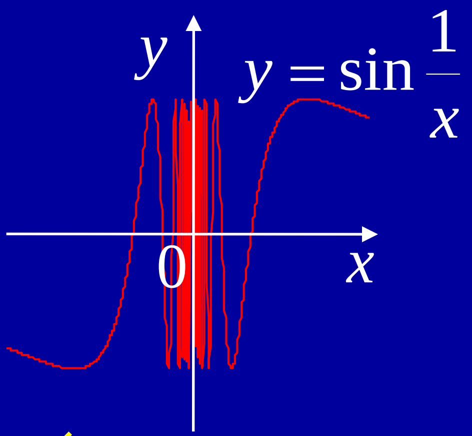
例如:

(1) $y=\tan x$



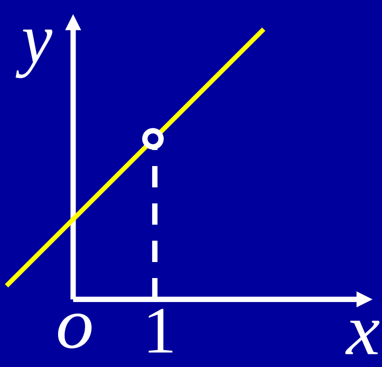
$x=\frac{\pi}{2}$ 为其无穷间断点 .

(2) $y=\sin\frac{1}{x}$



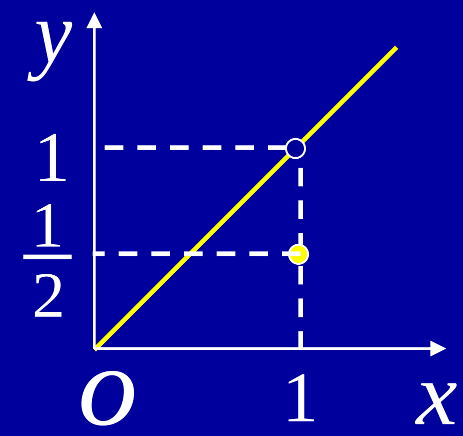
$x=0$ 为其振荡间断点 .

(3) $y=\frac{x^2-1}{x-1}$



$x=1$ 为可去间断点 .

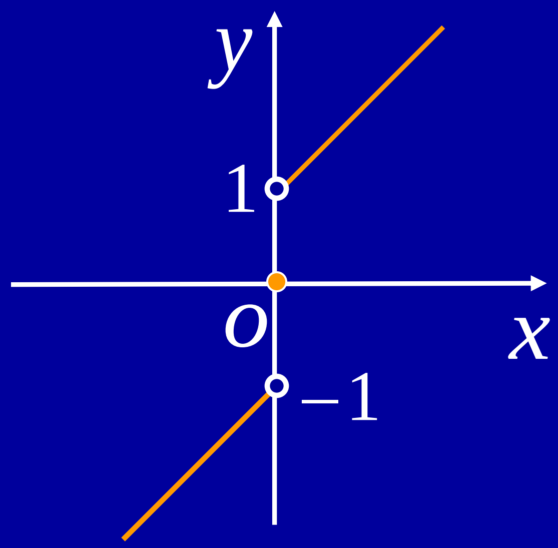
$$(4) \quad y = f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$$



显然 $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1 \neq f(1)$

$x = 1$ 为其可去间断点 .

$$(5) \quad y = f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}$$



$f(0^-) = -1, \qquad f(0^+) = 1$

$x = 0$ 为其跳跃间断点 .

例80. 讨论函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$ 间断点的类型.

解: 间断点 $x=0,\ x=1$

$\because\ \lim\limits_{x\to 0} f(x)=\infty$, $\therefore\ x=0$ 为无穷间断点;

当 $x\to 1^{-}$ 时, $\dfrac{x}{1-x}\to +\infty$, $\therefore\ f(x)\to 0$

当 $x\to 1^{+}$ 时, $\dfrac{x}{1-x}\to -\infty$, $\therefore\ f(x)\to 1$

故 $x=1$ 为跳跃间断点.

在 $x\neq 0,1$ 处, $f(x)$ 连续.

例81.设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a, g(x)=\begin{cases} f(\frac{1}{x}) & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$.则

(A) $x=0$必是$g(x)$的第一类间断点. (B) $x=0$必是$g(x)$的第二类间断点.
(C) $x=0$必是$g(x)$的连续点. (D) $g(x)$在$x=0$的连续性与a的取值有关.

解　因为$\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0} f(\frac{1}{x}) \overset{u=1/t}{=} \lim\limits_{u\to\infty} f(u)=a$ 又$g(0)=0$,

所以当$a=0$时，有$\lim\limits_{x\to 0} g(x)=g(0)$，此时$g(x)$在$x=0$处连续;

当$a\neq 0$时，有$\lim\limits_{x\to 0} g(x)\neq g(0)$，此时$x=0$是$g(x)$的第一类间断点，

因此，$g(x)$在$x=0$处的连续必性与a的取值有关.

(D)正确.

$1.$讨论函数$f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)}$的间断点类型.

$2.$设$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$,讨论函数$f(x)$的间断点,其结论为

(A)不存在间断点. (B)存在间断点$x=1$.

(C)存在间断点$x=0$. (D)存在间断点$x=-1$.

【分析】因函数以极限的形式给出,因此必须先求极限得到函数的表达式,具体应根据自变量**x**的不同变化范围求出**n→∞**的极限,确定**f(x)**,然后再讨论 **f(x)**的连续性.

$$f(x)=(1+x)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^{2n}}=\begin{cases}0, & x\le -1\\ 1+x, & -1<x<1\\ 1, & x=1\\ 0, & x>1\end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\begin{cases}0, & |x|<1\\ 1, & |x|=1\\ +\infty, & |x|>1\end{cases}$$

内容小结

1. $f(x)$ 在点 x_0 连续的等价形式

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \rightleftarrows \lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$$

$$\rightleftarrows \underbrace{f(x_0^-)=f(x_0)}_{\text{左连续}}=f(x_0^+)$$

（$f(x_0)=f(x_0^+)$：右连续）

2. $f(x)$ 在点 x_0 间断的类型

第一类间断点 $\left\{\begin{array}{l}\text{可去间断点}\\ \text{跳跃间断点}\end{array}\right\}$ 左右极限都存在

第二类间断点 $\left\{\begin{array}{l}\text{无穷间断点}\\ \text{振荡间断点}\end{array}\right\}$ 左右极限至少有一个不存在

思考与练习

1. 讨论函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 间断点的类型.

答案: $x=1$ 是第一类可去间断点，

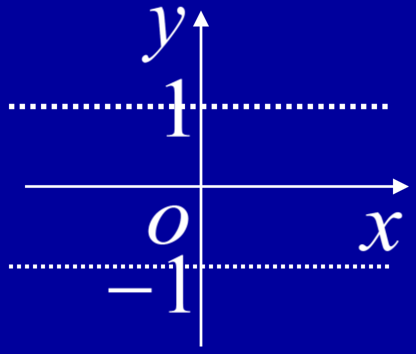
$x=2$ 是第二类无穷间断点 .

2. 设 $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x<0 \\ a+x^2, & x\geq 0 \end{cases}$，$a=$ __0__ 时 $f(x)$ 为连续函数.

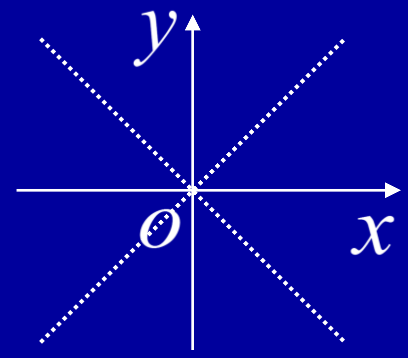
提示: $f(0^-)=0$，$f(0^+)=f(0)=a$

$$(1)\quad f(x)=\frac{1}{\sin\pi x}+\frac{1}{\sin\frac{\pi}{x}}$$

$$(2)\ f(x)=\begin{cases}1, & x=\text{有理点}\\ -1, & x=\text{无理点}\end{cases}$$



$$(3)\ f(x)=\begin{cases}x, & x=\text{有理点}\\ -x, & x=\text{无理点}\end{cases}$$



三、初等函数的连续性

（一）连续函数的运算法则

（二）初等函数的连续性

（一）连续函数的运算法则

定理2 在某点连续的**有限个**函数经**有限次**和 , 差 , 积 , 商(分母不为 0) 运算, 结果仍是一个在该点连续的函数 .

(利用极限的四则运算法则证明)

例如, $\sin x, \cos x$ 连续

⟹ $\tan x, \cot x$ 在其定义域内连续

定理3. 连续单调递增 (递减) 函数的反函数 也连续单调递增 (递减). (证明略)

例如, $y = \sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上连续单调递增,

其反函数 $y = \arcsin x$ 在 $[-1, 1]$ 上也连续单调递增.

又如, $y = e^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续 单调 递增,

其反函数 $y = \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上也连续单调递增.

定理4. 连续函数的复合函数是连续的.

证: 设函数 $u = \phi(x)$ 在点 x_0 连续, 且 $\phi(x_0) = u_0$.

函数 $y = f(x)$ 在点 u_0 连续, 即 $\lim\limits_{u \to u_0} f(u) = f(u_0)$.

于是

$$\lim_{x \to x_0} f[\phi(x)] = \lim_{u \to u_0} f(u) = f(u_0) = f[\phi(x_0)]$$

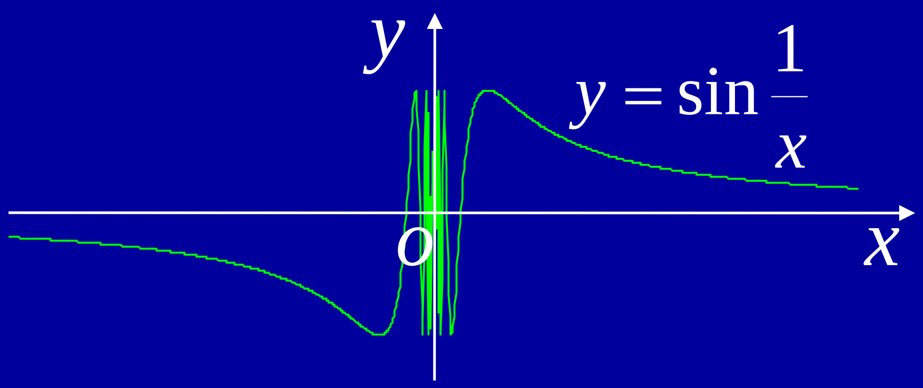
故复合函数$f[\phi(x)]$在点 x_0 连续.

例如, $y=\sin\frac{1}{x}$ 是由连续函数链

$$y=\sin u,\quad u\in(-\infty,+\infty)$$

$$u=\frac{1}{x},\qquad x\in R^{*}$$

复合而成，因此 $y=\sin\frac{1}{x}$ 在 $x\in R^{*}$ 上连续 .



例82. 设 $f(x)=\begin{cases} x, & x<1, \\ a, & x\ge 1, \end{cases}$ $g(x)=\begin{cases} b, & x<0, \\ x+2, & x\ge 0, \end{cases}$

试确定a,b的值,使函数$F(x)=f(x)+g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续

解 当$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)$时,即$a=1$时,

函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续;

当$\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=g(0)$时,即$b=2$时,

函数$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续;

故当$a=1,b=2$时,函数$f(x)$和$g(x)$都在$(-\infty,+\infty)$上连续,

由定理2可知,此时

函数$F(x)=f(x)+g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续.

例83. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 1 \\ 2-x, & x>1 \end{cases}$，$\varphi(x)=\begin{cases} x, & x\le 1 \\ x+4, & x>1 \end{cases}$

讨论复合函数 $f[\varphi(x)]$ 的连续性 .

解:

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases} \varphi^2(x), & \varphi(x)\le 1 \\ 2-\varphi(x), & \varphi(x)>1 \end{cases} = \begin{cases} x^2, & x\le 1 \\ -2-x, & x>1 \end{cases}$$

$x\ne 1$ 时 $f[\varphi(x)]$ 为初等函数，故此时连续；而

$$\lim_{x\to 1^-} f[\varphi(x)]=\lim_{x\to 1^-} x^2=1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f[\varphi(x)]=\lim_{x\to 1^+}(-2-x)=-3$$

故 $f[\varphi(x)]$ 在点 $x=1$ 不连续， $x=1$ 为第一类间断点 .

例84. 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}$.

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a e=\dfrac{1}{\ln a}$

习作1. 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x}$.

解: 令 $t=a^x-1$, 则 $x=\log_a(1+t)$,

$$原式=\lim_{t\to0}\frac{t}{\log_a(1+t)}=\ln a$$

说明: 当 $a=e, x\to0$ 时, 有

$$\ln(1+x)\sim x \qquad e^x-1\sim x$$

习作2 求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}$.

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{3}{\sin x}\ln(1+2x)}$

$$=\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{3}{x}\cdot 2x} = e^{6}$$

说明: 若 $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=0,\ \lim\limits_{x\to x_0} v(x)=\infty$, 则有

$$\lim\limits_{x\to x_0}\left[1+u(x)\right]^{v(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} v(x)\ln[1+u(x)]}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to x_0} v(x)u(x)}$$

习作3. 设$f(x)$和$\varphi(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有定义, $f(x)$连续函数, 且$f(x)\neq 0$, $\varphi(x)$有间断点, 则

(A) $\varphi[f(x)]$必有间断点.　　(B) $[\varphi(x)]^2$必有间断点.

(C) $f[\varphi(x)]$必有间断点.　　(D) $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$必有间断点.

解 取$f(x)=1, x\in(-\infty,+\infty)$, $\varphi(x)=\begin{cases}1, & x\geq 0\\ -1, & x<0\end{cases}$.

则$f(x)$,$\varphi(x)$满足题设条件

由于$\varphi[f(x)]=1$, $[\varphi(x)]^2=1$,$f[\varphi(x)]=1$都是连续函数.

故可排除(*A*),(*B*),(*C*),因而(*D*)入选.

（二）初等函数的连续性

基本初等函数在定义区间内连续

连续函数经四则运算仍连续

连续函数的复合函数连续

$\left.\right\}$ 一切初等函数在定义区间内连续

例如,

$y=\sqrt{1-x^2}$ 的连续区间为 $[-1,1]$ (端点为单侧连续)

$y=\ln\sin x$ 的连续区间为 $(2n\pi,(2n+1)\pi)$, $n\in Z$

内容小结

基本初等函数在定义区间内连续

连续函数的四则运算的结果连续

连续函数的反函数连续

连续函数的复合函数连续

$\Bigg\}$ 初等函数在定义区间内连续

说明： 分段函数在分段点处是否连续需讨论其左、右连续性.

思考与练习

若 $f(x)$ 在点 x_0 连续，问 $f^2(x), |f(x)|$ 在 x_0 是否连续? 反之是否成立?

提示: "反之" 不成立. 反例

$$f(x)=\begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数} \\ -1, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

$f(x)$ 处处间断, $f^2(x), |f(x)|$ 处处连续 .

四、闭区间上连续函数的性质

（一）最值定理

（二）介值定理

（一）最值定理

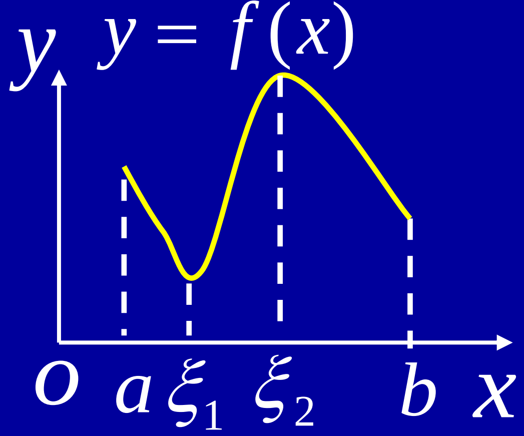
定理6 在闭区间上连续的函数，在该区间上一定有最大值和最小值.

即：设 $f(x) \in C[a,b]$，则 $\exists\, \xi_1, \xi_2 \in [a,b]$，使

$$f(\xi_1) = \min_{a \le x \le b} f(x)$$

$$f(\xi_2) = \max_{a \le x \le b} f(x)$$

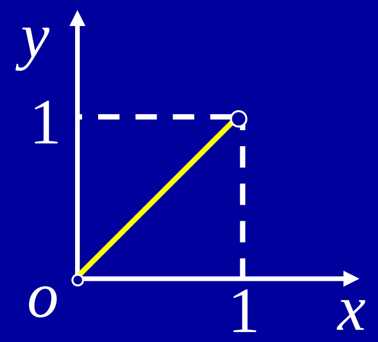
(证明略)



注意: 若函数在开区间上连续, 或在闭区间内有间断点，结论不一定成立 .

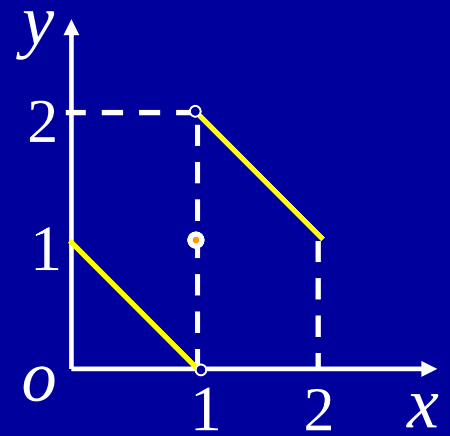
例如, $y = x, x \in (0,1)$

无最大值和最小值



又如,

$$f(x)=\begin{cases}-x+1, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ -x+3, & 1 < x \le 2\end{cases}$$

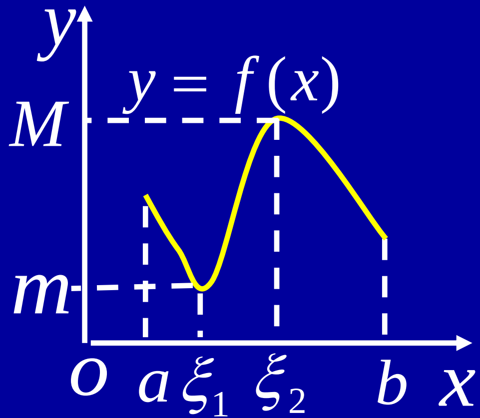


也无最大值和最小值

定理7 在闭区间上连续的函数在该区间上有界.

证: 设 $f(x)\in C[a,b]$, 由定理 1 可知有

$$M=\max_{x\in[a,b]} f(x)\,,\quad m=\min_{x\in[a,b]} f(x)$$



故 $\forall x\in[a,b]$, 有 $m\le f(x)\le M$,

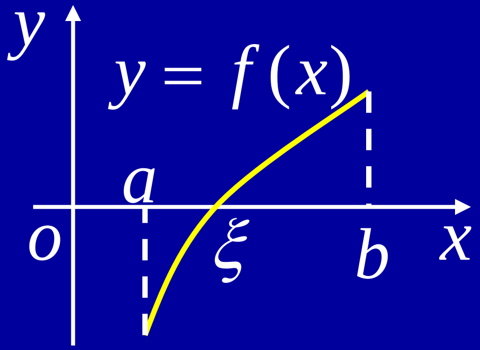
因此 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界 .

二、介值定理

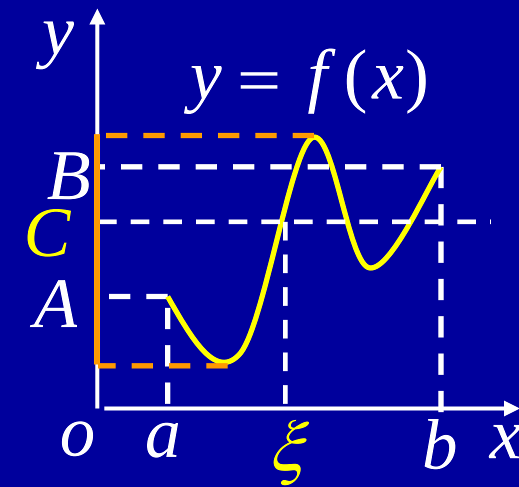
定理8 (零点定理) $f(x)\in C[a,b]$,

且 $f(a)f(b)<0 \Longrightarrow$ 至少有一点

$\xi\in(a,b)$, 使 $f(\xi)=0$. (证明略)



定理9. (介值定理) 设 $f(x)\in C[a,b]$, 且 $f(a)=A$, $f(b)=B$, $A\neq B$, 则对 A 与 B 之间的任一数 C, 至少有一点 $\xi\in(a,b)$, 使 $f(\xi)=C$.



证: 作辅助函数

$$\varphi(x)=f(x)-C$$

则 $\varphi(x)\in C[a,b]$, 且

$$\varphi(a)\,\phi(b)=(A-C)(B-C)<0$$

故由零点定理知, 至少有一点 $\xi\in(a,b)$, 使 $\varphi(\xi)=0$, 即

$$f(\xi)=C.$$

推论: 在闭区间上的连续函数必取得介于最小值与最大值之间的任何值 .

例1. 证明方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个根 .

证: 显然 $f(x)=x^3-4x^2+1\in C[0,1]$, 又

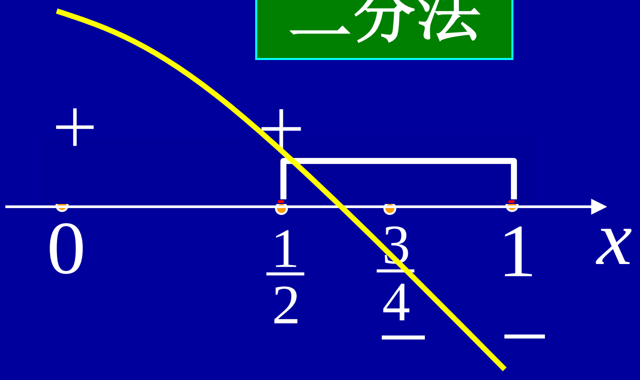
$$f(0)=1>0,\quad f(1)=-2<0$$

故据零点定理, 至少存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使 $f(\xi)=0$, 即

$$\xi^3-4\xi^2+1=0$$

说明:

二分法



取 $[0,1]$ 的中点 $x=\frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{8}>0$,

则 $(\frac{1}{2},1)$ 内必有方程的根 ;

取 $[\frac{1}{2},1]$ 的中点 $x=\frac{3}{4}$, $f(\frac{3}{4})<0$,

则 $(\frac{1}{2},\frac{3}{4})$ 内必有方程的根 ; $\cdots$ 可用此法求近似根.

例2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且恒为正，证明：对任意的 $x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 < x_2$, 必存在一点 $\xi \in [x_1, x_2]$, 使 $f(\xi) = \sqrt{f(x_1)f(x_2)}$.

证: 令 $F(x) = f^2(x) - f(x_1)f(x_2)$ ，则 $F(x) \in C[a,b]$

$$F(x_1)F(x_2) = -f(x_1)f(x_2)[f(x_1) - f(x_2)]^2 \le 0$$

当 $f(x_1) = f(x_2)$ 时，取 $\xi = x_1$ 或 $\xi = x_2$, 则有

$$f(\xi) = \sqrt{f(x_1)f(x_2)}$$

当 $f(x_1) \ne f(x_2)$ 时, $\because f(x) > 0$, $\therefore F(x_1)F(x_2) < 0$,

故由零点定理知，存在 $\xi \in (x_1, x_2)$, 使 $F(\xi) = 0$, 即

$$f(\xi) = \sqrt{f(x_1)f(x_2)}.$$

例87 证明$x=e^{x-3}+1$ 至少有一个不超过 4 的正根.

证: 令 $f(x)=x-e^{x-3}-1$

显然 $f(x)$ 在闭区间$[0,4]$上连续, 且

$$f(0)=-e^{-3}-1<0$$

$$f(4)=4-e^{4-3}-1=3-e>0$$

根据零点定理，在开区间$(0,4)$ 内至少存在一点 $\xi\in(0,4)$, 使 $f(\xi)=0$, 原命题得证 .

例88. 设$f(x)\in C[0,2a]$, $f(0)=f(2a)$, 证明至少存在一点 $\xi\in[0,a]$, 使 $f(\xi)=f(\xi+a)$.

提示: 令 $\varphi(x)=f(x+a)-f(x)$,

则 $\varphi(x)\in C[0,a]$, 易证 $\varphi(0)\varphi(a)\le 0$

内容小结

设 $f(x)\in C[a,b]$,则

1. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界;

2. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上达到最大值与最小值;

3. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可取最大与最小值之间的任何值;

4. 当 $f(a)f(b)<0$ 时, 必存在 $\xi\in(a,b)$, 使 $f(\xi)=0$.

讨论开区间上连续函数的有界性

结论1 设$f(x)$在开区间$(-\infty,+\infty)$上连续，且$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$存在，则$f(x)$在开区间$(-\infty,+\infty)$上有界.

证明 设$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$，

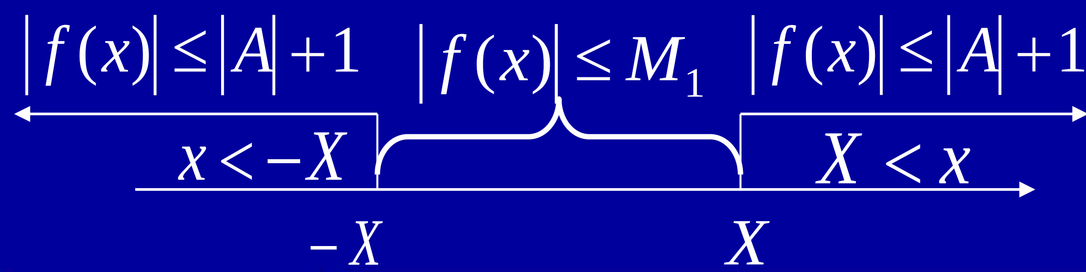
取$\varepsilon=1$，则$\exists X$，使得当$|x|>X$时，有$|f(x)-A|<1$

即$|f(x)|\le |A|+1$

又因$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，因此$f(x)$在闭区间$[-X,+X]$上连续，

于是$f(x)$在闭区间$[-X,X]$上有界，故$|f(x)|\le M_1 \ (x\in[-X,X])$

取$M=\max(|A|+1,M_1)$，于是对于$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，有$|f(x)|\le M$.



结论2 设$f(x)$在开区间(a,b)上连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=B$,

则$f(x)$在开区间(a,b)上有界.

证明 因 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=A$,

取$\varepsilon=1$,则$\exists\delta_1$,使得当$(a,a+\delta_1)$时,有$|f(x)-A|<1$

即$|f(x)|\le|A|+1$

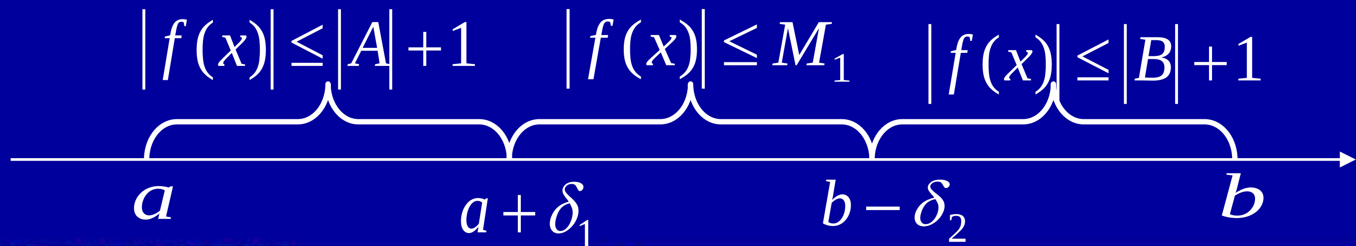
又 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=B$,

取$\varepsilon=1$,则$\exists\delta_2$,使得当$x\in(b-\delta_2,b)$时,$|f(x)|\le|B|+1$

又因$f(x)$在(a,b)上连续,因此$f(x)$在闭区间$[a+\delta_1,b-\delta_2]$上连续,

于是 $f(x)$在闭区间$[a+\delta_1,b-\delta_2]$上有界, 故$|f(x)|\le M_1$,

取$M=\max(|A|+1,|B|+1,M_1)$, 则对于$x\in(a,b)$,有$|f(x)|\le M$.



结论3 设$f(x)$在区间$(a,b]$上连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=A$，则$f(x)$在开区间$(a,b]$上有界.

结论4 设$f(x)$在区间$[a,b)$上连续，且 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=A$，则$f(x)$在开区间$[a,b)$上有界.

函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列的哪个区间内有 界.

$(A)\ (-1,0)$.　　$(B)\ (0,1)$.　　$(C)\ (1,2)$.　　$(D)\ (2,3)$.

解 因$x\neq 0,1,2$时，$f(x)$连续.

而 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\dfrac{\sin 2}{4}$，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\dfrac{\sin 2}{4}$，

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\infty$，

所以 $f(x)$在$(-1,0)$内有界.