第二节　极　限

四、极限运算法则

（一） 极限的四则运算法则

（二） 复合函数的极限运算法则

（一） 极限的四则运算法则

定理 9 （1） 若$\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$,则有

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$$

证: 因$\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$, 则有

$$f(x)=A+\alpha\ ,\ \ g(x)=B+\beta$$

(其中α, β 为无穷小)

于是

$$f(x)\pm g(x)=(A+\alpha)\pm(B+\beta)$$

$$=(A\pm B)+(\alpha\pm\beta)$$

由定理 1 可知$\alpha\pm\beta$也是无穷小, 再利用极限与无穷小的关系定理 , 知定理结论成立 .

推论: 若 $\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$, 且 $f(x)\ge g(x)$,

则 $A\ge B$.

提示: 令 $\varphi(x)=f(x)-g(x)$

利用保号性定理证明 .

说明: 定理 9 可推广到有限个函数相加、减的情形 .

定理 9（2） 若 $\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$，则有

$$\lim[f(x)g(x)]=\lim f(x)\lim g(x)=AB$$

提示: 利用极限与无穷小关系定理及本节定理2 证明 .

说明: 定理 4 可推广到有限个函数相乘的情形 .

推论 1 . $\lim[C f(x)]=C\lim f(x)$ （ C 为常数 ）

推论 2 . $\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n$ （ n 为正整数 ）

例2. 设 n 次多项式 $P_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$，试证 $\lim\limits_{x\to x_0}P_n(x)=P_n(x_0)$.

证: $\lim\limits_{x\to x_0}P_n(x)=a_0+a_1\lim\limits_{x\to x_0}x+\cdots+a_n\lim\limits_{x\to x_0}x^n$

$$=P_n(x_0)$$

定理9（3） 若 $\lim f(x)=A,\ \lim g(x)=B$，且 $B\neq 0$，则有

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{A}{B}$$

证: 因 $\lim f(x)=A,\ \lim g(x)=B$，有

$$f(x)=A+\alpha\ ,\ \ g(x)=B+\beta\ ,\ 其中\ \alpha\ ,\beta\ 为无穷小$$

设 $$\gamma=\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{A}{B}=\frac{A+\alpha}{B+\beta}-\frac{A}{B}=\underbrace{\frac{1}{B(B+\beta)}}_{有界}\underbrace{(B\alpha-A\beta)}_{无穷小}$$

因此 γ 为无穷小, $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}+\gamma$

由极限与无穷小关系定理，得 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$

定理9' 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$，则有

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = A \pm B$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = AB$

(3) 当$y_n \neq 0$且$B \neq 0$时，$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{A}{B}$

提示： 因为数列是一种特殊的函数，故此定理 可由定理9-1，2，3 直接得出结论 .

定理10

(1)若 $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$，且 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$；

(2)若 $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A(\neq 0)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$.

（二） 复合函数的极限运算法则

定理11 设 $\lim\limits_{x\to x_0}\phi(x)=a$, 且 x 满足 $\underline{0<|x-x_0|<\delta_1}$ 时,

$\phi(x)\neq a$, 又 $\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$, 则有

$$\lim_{x\to x_0}f[\phi(x)]=\lim_{u\to a}f(u)=A \qquad ①$$

证: $\lim\limits_{u\to a}f(u)=A \Longrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\eta>0$, 当 $0<|u-a|<\eta$

时, 有 $|f(u)-A|<\varepsilon$

$\lim\limits_{x\to x_0}\phi(x)=a \Longrightarrow$ 对上述 $\eta>0, \exists\delta_2>0$, 当

$\underline{0<|x-x_0|<\delta_2}$ 时, 有 $|\phi(x)-a|<\eta$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时

$$0<|\phi(x)-a|=|u-a|<\eta$$

故 $|f[\varphi(x)]-A|=|f(u)-A|<\varepsilon$, 因此①式成立.

定理11. 设 $\lim\limits_{x\to x_0}\phi(x)=a$, 且 x 满足 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时, $\phi(x)\neq a$, 又 $\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$, 则有

$$\lim_{x\to x_0}f[\phi(x)]=\lim_{u\to a}f(u)=A$$

说明: 若定理中 $\lim\limits_{x\to x_0}\phi(x)=\infty$, 则类似可得

$$\lim_{x\to x_0}f[\phi(x)]=\lim_{u\to\infty}f(u)=A$$

例. 求 $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{\dfrac{x-3}{x^2-9}}$.

解: 令 $u = \dfrac{x-3}{x^2-9}$

已知 $\lim\limits_{x \to 3} u = \dfrac{1}{6}$

$\therefore$ 原式 $= \lim\limits_{u \to \frac{1}{6}} \sqrt{u} = \sqrt{\dfrac{1}{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$

例45. 求极限(1) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x+\tan x+\mathrm{e}^x)$; (2) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x+\tan x+\mathrm{e}^x)$

$$=\lim_{x\to 0}\sin x+\lim_{x\to 0}\tan x+\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^x$$

$$=\sin 0+\tan 0+\mathrm{e}^0=1$$

(2) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1}=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to -\infty}\mathrm{e}^x+1}=\dfrac{1}{0+1}=1.$

例46. 求极限 (1) $\lim\limits_{x\to1}(2x^2-5x+3)$;　　(2) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+2x-1}{2-3x^2}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to1}(2x^2-5x+3)$

$$=\lim_{x\to1}2x^2-\lim_{x\to0}5x+\lim_{x\to0}3$$

$$=2-5+3=0$$

(2) $$\lim_{x\to-1}\frac{x^3+2x-1}{2-3x^2}=\frac{\lim\limits_{x\to-1}(x^3+2x-1)}{\lim\limits_{x\to-1}(2-3x^2)}$$

$$=\frac{(-1)^3+2\times(-1)-1}{2-3\times(-1)^2}=4.$$

例47. (1) 已知 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2+ax-3}=b\neq 0$, 求 a,b 值.

解　因为 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2+ax-3}=b\neq 0$, 且 $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)=0$,

由定理10, 有 $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+ax-3)=0$,

即 $1+a-3=0$, $a=2$. 于是

$$b=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+3)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x+3}=\frac{1}{2}.$$

例47. (2) 已知$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}=3$, 求$a,b$值.

解:因为$\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$,而$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}=3$(存在)

故$\lim\limits_{x\to 1}(x^2+ax+b)=0$ 即 $1+a+b=0$

于是 $b=-(1+a)$ 代入已知条件,得

$$3=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax-1-a}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)+(ax-a)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1+a)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}(x+1+a)=2+a$$

故 $a=3-2=1,\ b=-1-a=-2.$

HIGH EDUCATION PRESS

练习. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)+a}{x}=6$, 求 a 的值.

解 由题设, 得 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)+a}{x}-6\right]=0$

即 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)+a-6x}{x}=0$

于是 $\lim\limits_{x\to 0}[(1+x)(1+2x)(1+3x)+a-6x]=0$

得 $[(1+0)(1+2\times 0)(1+3\times 0)+a-6\times 0]=0\Rightarrow a=-1$

3. 确定 a,b,c 使下式成立

$$\lim_{x\to 1}\frac{a(x-1)^2+b(x-1)+c-\sqrt{x^2+3}}{(x-1)^2}=0.$$

解 因$\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2=0$

而极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{a(x-1)^2+b(x-1)+c-\sqrt{x^2+3}}{(x-1)^2}=0$(存在).

故 $\lim\limits_{x\to 1}[a(x-1)^2+b(x-1)+c-\sqrt{x^2+3}]=0.$

解得 $c=2$

又 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{a(x-1)+b+\dfrac{2-\sqrt{x^2+3}}{(x-1)}}{(x-1)}=0$(存在).

故 $\lim\limits_{x\to 1}[a(x-1)+b+\dfrac{2-\sqrt{x^2+3}}{(x-1)}]=0$

得 $b=-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-\sqrt{x^2+3}}{(x-1)}$

$$=-\lim_{x\to 1}\frac{[2-\sqrt{x^2+3}][2+\sqrt{x^2+3}]}{(x-1)[2+\sqrt{x^2+3}]}=-\lim_{x\to 1}\frac{4-(x^2+3)}{(x-1)[2+\sqrt{x^2+3}]}$$

$$=-\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(1+x)}{(x-1)[2+\sqrt{x^2+3}]}=\lim_{x\to 1}\frac{(1+x)}{2+\sqrt{x^2+3}}=\frac{1}{2}$$

于是由 $\lim\limits_{x\to 1}[a+\dfrac{1/2}{(x-1)}+\dfrac{2-\sqrt{x^2+3}}{(x-1)^2}]=0$

得 $a=-\lim\limits_{x\to 1}[\dfrac{1/2}{(x-1)}+\dfrac{2-\sqrt{x^2+3}}{(x-1)^2}]=\dfrac{3}{16}$

例48. 求 (1) $\lim\limits_{x\to 1}\ln(x+1)$； (2) $\lim\limits_{x\to -\infty}\sin(e^x)$.

解 (1) 设 $u=x+1$,

因为 $\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$, $\lim\limits_{u\to 2}\ln u=\ln 2$,

故由复合函数的运算法则，得

$$\lim_{x\to 1}\ln(x+1)=\ln 2.$$

(2) 设 $u=e^x$,

因为 $\lim\limits_{x\to -\infty}e^x=0$, $\lim\limits_{u\to 0}\sin u=0$,

故由复合函数的运算法则，得

$$\lim_{x\to -\infty}\sin(e^x)=0.$$

例48 求 (3) $\lim\limits_{x\to 0^-} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

解 (1) 设 $u=\dfrac{1}{x}$,

因为 $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x}=-\infty$, $\lim\limits_{u\to -\infty} \mathrm{e}^{u}=0$,

故由复合函数的运算法则，得

$$\lim_{x\to 0^-} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=0.$$

设有分式函数 $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$，其中$P(x),Q(x)$ 都是多项式，若 $Q(x_0)\neq 0$，试证：$\lim\limits_{x\to x_0} R(x)=R(x_0)$.

证: $$\lim_{x\to x_0} R(x)=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}=R(x_0)$$

说明: 若 $Q(x_0)=0$，不能直接用商的运算法则 .

例49 （1）$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3}(x+3)=6.$$

例49 （2） 求极限 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2+x-7}{3x^2+x-4}$.

解 因分母的极限 $\lim\limits_{x\to1}(3x^2+x-4)=0,$

商的法则不能用. 又因为

$$\lim_{x\to1}(3x^2+x-7)=-3,$$

故 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2+x-4}{3x^2+x-7}=\dfrac{0}{-3}=0,$

由无穷大与无穷小的关系,得

$$\lim_{x\to1}\frac{3x^2+x-7}{3x^2+x-4}=\infty.$$

例49 （3） 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)\arctan(x-1)}{x^2+3x+2}$.

解 因 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x^2+3x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{(x+1)(x+2)}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+2}=0,$$

即 $\dfrac{x+1}{x^2+3x+2}$ 是$x\to\infty$时的无穷小，又因为

$|\arctan(x-1)|\le\dfrac{\pi}{2}$,即$\arctan(x-2)$有界,

由无穷小的性质,得 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)\arctan(x-1)}{x^2+3x+2}=0$.

例50 （1） 求极限 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{5}}$.

解 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{5}}$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x^2+5}-3)\ (\sqrt{x^2+5}+3)\ \ (\sqrt{2x+1}+\sqrt{5})}{(\sqrt{2x+1}-\sqrt{5})(\sqrt{2x+1}+\sqrt{5})(\sqrt{x^2+5}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-4)(\sqrt{2x+1}+\sqrt{5})}{(2x-4)(\sqrt{x^2+5}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(\sqrt{2x+1}+\sqrt{5})}{2(\sqrt{x^2+5}+3)}=\frac{2}{3}\sqrt{5}\ .$$

例50 （2） 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{[(\sqrt{x^2+1})^2-x^2]}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0\ .$$

例51 求极限 (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+x-9}{2x^2-x+4}$.

解: $x\to\infty$ 时, 分母 $\to\infty$, 分子 $\to\infty$.

分子分母同除以 x^2, 则

"抓大头"

原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+\dfrac{1}{x}-\dfrac{7}{x^2}}{2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{x^2}}=\dfrac{3+0-0}{2-0+0}=\dfrac{3}{2}$.

例51 求极限 (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+x-7}{4x^2+x-4}$.

思考：能否按上例的方法，分子、分母同时除以x的最高次幂呢？

解: 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+x-4}{3x^3+x-7}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{4}{x^3}}{3+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{7}{x^3}}=0$

由无穷小与无穷大的关系，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+x-7}{4x^2+x-4}=\infty.$$

例51 求极限 (3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x-4}{3x^4+x-7}$.

解: $x\to\infty$ 时，分母 $\to\infty$，分子 $\to\infty$.

分子分母同除以 x^4，则

“抓大头”

$$\text{原式}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{4}{x^4}}{3+\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{7}{x^4}}=\frac{0+0-0}{3+0-0}=0.$$

一般有如下结果：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}$$

($a_0b_0\neq 0, m, n$ 为非负常数)

$$=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & \text{当} n=m\\ 0\ , & \text{当} n>m\\ \infty\ , & \text{当} n<m\end{cases}$$

求极限方法小结

1.分解因式

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)}{(2x+1)(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{2x+1}=\frac{2}{3}$$

2.通分

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to1}\frac{(1+x+x^2)-3}{1-x^3}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{1-x^3}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x+2)(x-1)}{(1+x+x^2)(1-x)}=-\lim_{x\to1}\frac{(x+2)}{(1+x+x^2)}=-1$$

3. 分子分母除以最高次幂

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-1)^{300}(3x-2)^{200}}{(2x+1)^{500}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(2-\frac{1}{x})^{300}(3-\frac{2}{x})^{200}}{(2+\frac{1}{x})^{500}}$$ (分子分母除以最高次幂 x^{500})

4.有理化

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\neq(+\infty)-(+\infty)=0$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{2x+1}-3)(\sqrt{2x+1}+3)(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x-2}-\sqrt{2})(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})(\sqrt{2x+1}+3)}$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{(2x+1-9)(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{(x-2-2)(\sqrt{2x+1}+3)}=\lim_{x\to4}\frac{(2x-8)(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)}$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{2(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{(\sqrt{2x+1}+3)}=\frac{2(\sqrt{4-2}+\sqrt{2})}{(\sqrt{4\times2+1}+3)}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

5. 应用定理求解

1. $\lim_{x\to\infty}\frac{1+x^2}{\sqrt{2}x}$ 因 $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2}x}{1+x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2}\,\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+1}=0$

故 $\lim_{x\to\infty}\frac{1+x^2}{\sqrt{2}x}=\infty$

2. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x\sin x}{\sqrt{1+x^2}}\arctan\frac{1}{x}$

$$\text{原式} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\lim_{x\to\infty}(\sin x\arctan\frac{1}{x})$$

$$\text{因}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = 2$$

$$\text{而}\quad \lim_{x\to\infty}\arctan\frac{1}{x} = 0\ ,\ \left|\sin x\right| \le 1$$

$$\text{故}\quad \lim_{x\to\infty}\sin x\arctan\frac{1}{x} = 0$$

有界量与无穷小量的乘积还是无穷小量

$$\text{于是}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\lim_{x\to\infty}(\sin x\arctan\frac{1}{x}) = 0$$

例52 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{1+x}-ax-b\right)=0$, 求 a, b 的值.

解 由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{1+x}-ax-b\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-(1+x)(ax+b)}{1+x}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2-(a+b)x-b}{1+x}=0,$$

于是，有 $\begin{cases}1-a=0\\ a+b=0\end{cases}$,

解得 $a=1, b=-1.$

例52直观上是曲线 $y=\dfrac{x^2}{1+x}$ 上点的纵坐标与直线 $y=ax+b$ 上相应点的纵坐标之差,当 $x\to\infty$ 时的极限为0

因此,当 $x\to\infty$ 时,曲线无限地接近于直线,即直线 $y=ax+b$ 是曲线 $y=\dfrac{x^2}{1+x}$ 的斜渐近线。

一般地,如果 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(ax+b)]=0,$

则称直线 $y=ax+b$ 为曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线。

其中 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x},\quad b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax].$

例53 求 $y=\dfrac{(x-3)^2}{4(x-1)}$ 的渐近线.

解 由于 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-3)^2}{4(x-1)}=\infty$

故 x=1是曲线的一条铅直渐近线.

又因为 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-3)^2}{4x(x-1)}=\dfrac{1}{4}$,

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax]=\lim_{x\to\infty}[\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}-\frac{x}{4}]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-5x+9}{4(x-1)}=-\frac{5}{4},$$

所以,直线 $y=\dfrac{1}{4}x-\dfrac{5}{4}$ 是曲线的斜渐近线.

例54 设 $P(x)$ 是多项式，且 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P(x)-2x^3}{x^2}=1$，又 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{P(x)}{3x}=1$，求 $P(x)$.

解: 利用前一极限式可令 $f(x)=2x^3+x^2+ax+b$

再利用后一极限式，得

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{P(x)}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^3+x^2+ax+b}{3x},$$

而 $\lim\limits_{x\to 0}3x=0$， 故 $\lim\limits_{x\to 0}(2x^3+x^2+ax+b)=0$,

可得 $b=0$，代入 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3+x^2+ax+b}{3x}=1$，得 $a=3$,

故 $f(x)=2x^3+x^2+3x$

内容小结

1. 极限运算法则

(1) 无穷小运算法则

(2) 极限四则运算法则　　注意使用条件

(3) 复合函数极限运算法则

2. 求函数极限的方法

(1) 分式函数极限求法

1) $x \to x_0$ 时, 用代入法　(分母不为 0)

2) $x \to x_0$ 时, 对 $\frac{0}{0}$ 型 , 约去公因子

3) $x \to \infty$ 时 , 分子分母同除最高次幂　“ 抓大头”

(2) 复合函数极限求法 —— 设中间变量

思考及练习

1. 若 $\lim f(x)$ 存在, $\lim g(x)$ 不存在, 问 $\lim[f(x)+g(x)]$ 是否存在？为什么？

答: 不存在．否则由 $g(x)=[f(x)+g(x)]-f(x)$ 利用极限四则运算法则可知 $\lim g(x)$ 存在，与已知条件矛盾.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right]=?$

解: 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}(1+\dfrac{1}{n})=\dfrac{1}{2}$

3. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$.

解法 1

$$原式 = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{1}{2}$$

解法 2 令 $t=\frac{1}{x}$, 则 $t\to 0^+$

$$原式 = \lim_{t\to0^+}\frac{1}{t}\left[\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}-\frac{1}{t}\right] = \lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt{1+t^2}-1}{t^2}$$

$$= \lim_{t\to0^+}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}+1} = \frac{1}{2}$$

4. 试确定常数 a 使 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}-ax)=0.$

解： 令 $t=\dfrac{1}{x}$，则

$$0=\lim_{t\to 0}\left[\sqrt[3]{1-\frac{1}{t^3}}-\frac{a}{t}\right]=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{t^3-1}-a}{t}$$

$$\therefore\quad \lim_{t\to 0}\left[\sqrt[3]{t^3-1}-a\right]=0$$

故 $\quad -1-a=0 \qquad$ 因此 $\quad a=-1$

作业题 若 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$，求$a,b$的值.$(a=1,b=-1)$

习作题 已知 $\lim_{x\to+\infty}(5x-\sqrt{ax^2-bx+c})=2$,求$a,b$之值.

解 因 $\lim_{x\to+\infty}(5x-\sqrt{ax^2-bx+c})$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(5x-\sqrt{ax^2-bx+c})(5x+\sqrt{ax^2-bx+c})}{(5x+\sqrt{ax^2-bx+c})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(25-a)x^2+bx-c}{5x+\sqrt{ax^2-bx+c}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(25-a)x+b-\frac{c}{x}}{5+\sqrt{a-\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}}$$

故必有 $25-a=0,\ \dfrac{b}{5+\sqrt{a}}=2$ 解得 $a=25,b=20.$

2. 设$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$存在, $f(x)=x^2+2x\lim\limits_{x\to 1} f(x)$,求$f(x)$.

解　设 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=A$,两边取极限,得

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}[x^2+2x\lim_{x\to 1} f(x)]$$

即 $A=1+2A \Rightarrow A=-1$,　故 $f(x)=x^2-2x$.