同济大学

高等代数与解析几何

教师：　蒋志洪

理学院数学系

第九章内积空间

§9.1 内积空间定义与基本性质

定义. 设V 是$\mathbb{F}$ 上的线性空间, $V\times V$ 到$\mathbb{F}$ 上的映射称为V上的二元函数

定义. 设V是$\mathbb{F}$上线性空间, 如果在V上有一个二元函数$(\ ,\ )$满足如下条件:

(1) 对任意$\alpha,\beta\in V$, $(\beta,\alpha)=\overline{(\alpha,\beta)}$

(2) 对任意$\alpha,\beta,\gamma\in V$, $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$

(3) 对任意$\alpha,\beta\in V$, $k\in\mathbb{F}$, $(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$

(4) 对任意$\alpha\in V$, $(\alpha,\alpha)\geq 0$, 并且$(\alpha,\alpha)=0$当且仅当$\alpha=\mathbf{0}$

则称二元函数$(\ ,\ )$为V上的一个内积, 具有内积的空间称为内积空间. 当$\mathbb{F}$是复数域时, V 称为酉空间, 当$\mathbb{F}$是实数域时, 称V为欧几里得空间, 或简称为欧氏空间

命题. 当V为酉空间时, 则对于任意$\alpha,\beta,\gamma\in V, k\in\mathbb{C}$,

(1) $\bar{k}(\alpha,\beta)=(\alpha,k\beta)$

(2) $(\alpha,\beta+\gamma)=(\alpha,\beta)+(\alpha,\gamma)$

(3) $(\alpha,\mathbf{0})=(\mathbf{0},\alpha)=0$

证明. (1) $(\alpha,k\beta)=\overline{(k\beta,\alpha)}=\overline{k(\beta,\alpha)}=\bar{k}\overline{(\beta,\alpha)}=\bar{k}(\alpha,\beta)$.

(2) $(\alpha,\beta+\gamma)=\overline{(\beta+\gamma,\alpha)}=\overline{(\beta,\alpha)+(\gamma,\alpha)}=\overline{(\beta,\alpha)}+\overline{(\gamma,\alpha)}=(\alpha,\beta)+(\alpha,\gamma)$

(3) $(\mathbf{0},\alpha)=(0\mathbf{0},\alpha)=0(\mathbf{0},\alpha)=0$

推论. 当V为欧几里得空间时, 则对于任意$\alpha,\beta,\gamma\in V, k\in\mathbb{R}$,

(1) $(\beta,\alpha)=(\alpha,\beta)$

(2) $k(\alpha,\beta)=(\alpha,k\beta)$

(3) $(\alpha,\beta+\gamma)=(\alpha,\beta)+(\alpha,\gamma)$

例. 设$V=\mathbb{F}^n$, 在V上定义二元函数如下: 对于$\alpha=(x_1,\cdots,x_n)^T$, $\beta=(y_1,\cdots,y_n)^T$, 定义$(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^n x_i\bar{y}_i=\alpha^T\bar{\beta}$, 证明(,)是$\mathbb{F}^n$的内积. (以后我们将称此内积为$\mathbb{F}^n$上的标准内积).

证明. (1) $(\alpha,\beta)=\alpha^T\bar{\beta}=\overline{\overline{\alpha^T\bar{\beta}}}=\overline{\overline{\alpha^T}\,\bar{\bar{\beta}}}=\overline{\bar{\alpha}^T\beta}=\overline{\beta^T\bar{\alpha}}=\overline{(\beta,\alpha)}$

(2) $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha+\beta)^T\bar{\gamma}=(\alpha^T+\beta^T)\bar{\gamma}=(\alpha^T\bar{\gamma}+\beta^T\bar{\gamma})=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$

(3) $(k\alpha,\beta)=(k\alpha)^T\bar{\beta}=k\alpha^T\bar{\beta}=k(\alpha,\beta)$

(4) $(\alpha,\alpha)=\alpha^T\bar{\alpha}\geq 0$, 并且$(\alpha,\alpha)=0$当且仅当$\alpha=\mathbf{0}$

所以(,)是$\mathbb{F}^n$上的内积.

例. 设$V=\mathbb{R}^2$, 对$\alpha=(x_1,x_2)$, $\beta=(y_1,y_2)$, 定义

$$(\alpha,\beta)=x_1y_1-x_2y_1-x_1y_2+4x_2y_2$$

证明$(\ ,\ )$是V上的内积.

证明. (1) $(\alpha,\beta)=x_1y_1-x_2y_1-x_1y_2+4x_2y_2=(\beta,\alpha)$

(2)

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta,\gamma)&=(x_1+y_1)z_1-(x_2+y_2)z_1-(x_1+y_1)z_2+4(x_2+y_2)z_2\\&=x_1z_1+y_1z_1-x_2z_1-y_2z_1-x_1z_2-y_1z_2+4x_2z_2+4y_2z_2\\&=x_1z_1-x_2z_1-x_1z_2+4x_2z_2+y_1z_1-y_2z_1-y_1z_2+4y_2z_2\\&=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)\end{aligned}$$

这里$\gamma=(z_1,z_2)$

(3) $(k\alpha,\beta)=kx_1y_1-kx_2y_1-kx_1y_2+4kx_2y_2=k(x_1y_1-x_2y_1-x_1y_2+4x_2y_2)=k(\alpha,\beta)$

(4) $(\alpha,\alpha)=x_1^2-2x_1x_2+4x_2^2=(x_1-x_2)^2+3x_2^2\geq 0$ 并且$(\alpha,\alpha)=0$当且仅当$x_1=x_2=0$, 即$\alpha=\mathbf{0}$.

所以$(\ ,\ )$是V上一个内积

例. 设V是区间$[0,1]$上所有复值连续函数所构成的线性空间, 定义

$$(f(x),g(x))=\int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$$

证明$(\ ,\ )$是V上一个内积.

证明.
(1) $(f(x),g(x))=\int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt=\overline{\int_0^1 \overline{f(t)\overline{g(t)}}dt}=\overline{\int_0^1 \overline{f(t)}g(t)dt}=\overline{(\beta,\alpha)}$

(2) $(f(x)+g(x),h(x))=\int_0^1 (f(t)+g(t))\overline{h(t)}dt=\int_0^1 f(t)\overline{h(t)}dt+\int_0^1 g(t)\overline{h(t)}dt$
$=(f(x),h(x))+(g(x),h(x))$

(3) $(kf(x),g(x))=\int_0^1 kf(t)\overline{g(t)}dt=k\int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt=k(f(x),g(x))$

(4) $(f(x),f(x))=\int_0^1 f(t)\overline{f(t)}dt=\int_0^1 |f(t)|^2dt\geq 0$ 并且$\int_0^1 |f(t)|^2dt=(f(x),f(x))=0$当且仅当$|f(x)|^2=0$, 即$f(x)=0$.
所以$(\ ,\ )$是V上一个内积

定义. 设V是内积空间, 非负实数$\sqrt{(\alpha,\alpha)}$称为向量α的长度, 记为$\| \alpha \|$. 长度为1的向量称为单位向量.

定理. 设V是一个内积空间, 则对任何向量$\alpha,\beta \in V$及数$k \in \mathbb{F}$, 必有

(1) $\|\alpha\| \geq 0$, $\|\alpha\| = 0$当且仅当$\alpha = \mathbf{0}$;

(2) $\|k\alpha\| = |k|\|\alpha\|$;

(3) $|(\alpha,\beta)| \leq \|\alpha\|\|\beta\|$, 当且仅当$\alpha,\beta$线性相关时, 等号成立. (柯西-布涅雅柯夫斯基Cauchy-不等式);

(4) $\|\alpha+\beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$ (三角不等式子).

证明. (1) 由内积的定义推出.

(2) $\|k\alpha\| = \sqrt{(k\alpha, k\alpha)} = \sqrt{k\overline{k}(\alpha,\alpha)} = \sqrt{|k|^2}\sqrt{(\alpha,\alpha)} = |k|\|\alpha\|$.

(3) 当α, β线性相关时, 不妨设$\alpha = k\beta$, 则

$$|(\alpha,\beta)| = |(k\beta,\beta)| = |k(\beta,\beta)| = |k|\|\beta\|^2$$

另一方面,

$$\|\alpha\|\cdot\|\beta\| = \|k\beta\|\cdot\|\beta\| = |k|\|\beta\|\cdot\|\beta\| = |k|\|\beta\|^2$$

所以$|(\alpha,\beta)| = \|\alpha\|\cdot\|\beta\|$.

当α, β线性无关时, 则对于任意$k \in \mathbb{F}$, $\gamma = \alpha + k\beta \neq \mathbf{0}$, 于是

$$0 < (\gamma,\gamma) = (\alpha,\alpha) + \overline{k}(\alpha,\beta) + k(\beta,\alpha) + k\overline{k}(\beta,\beta)$$

特别取$k = -\frac{(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}$ 得

$$(\alpha,\alpha) - \frac{\overline{(\alpha,\beta)}}{(\beta,\beta)}(\alpha,\beta) - \frac{(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}(\beta,\alpha) + \frac{(\alpha,\beta)\overline{(\alpha,\beta)}}{(\beta,\beta)} > 0$$

即

$$\overline{(\alpha,\beta)}(\alpha,\beta) < (\alpha,\alpha)(\beta,\beta), \text{或者} |(\alpha,\beta)| < \|\alpha\|\cdot\|\beta\|.$$

(4)

$$\begin{aligned}
\|\alpha+\beta\|^2 &= (\alpha+\beta,\alpha+\beta) = (\alpha,\alpha)+(\alpha,\beta)+(\beta,\alpha)+(\beta,\beta)\\
&= \|\alpha\|^2+\|\beta\|^2+(\alpha,\beta)+\overline{(\alpha,\beta)}\\
&= \|\alpha\|^2+\|\beta\|^2+2\mathrm{Re}(\alpha,\beta)\\
&\le \|\alpha\|^2+\|\beta\|^2+2|(\alpha,\beta)|\\
&\le \|\alpha\|^2+\|\beta\|^2+2\|\alpha\|\cdot\|\beta\|\\
&= (\|\alpha\|+\|\beta\|)^2
\end{aligned}$$

所以

$$\|\alpha+\beta\| \le \|\alpha\|+\|\beta\|.$$

推论. 设V为内积空间, 则对任何$\alpha,\beta\in V$,

$$\|\alpha\|-\|\beta\| \le \|\alpha-\beta\|.$$

证明: $\|\alpha-\beta\|+\|\beta\| \ge \|(\alpha-\beta)+\beta\| = \|\alpha\|$, 所以$\|\alpha\|-\|\beta\| \le \|\alpha-\beta\|$.

说明. 如果$\alpha \neq \mathbf{0}$, 则向量$\frac{1}{\|\alpha\|}\alpha$ 是单位向量.

对于$\alpha = (x_1, x_2, \cdots, x_n), \beta = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$, 由于$(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y}_i$是$\mathbb{F}^n$上的标准内积, 所以我们有下面不等式

$$|\sum_{i=1}^n x_i \overline{y}_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n |y_i|^2}$$

对于$\alpha = (x_1, x_2), \beta = (y_1, y_2)$, 由于$(\alpha, \beta) = x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 4x_2y_2$是$\mathbb{R}^2$上的内积, 所以我们有下面不等式

$$|x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 4x_2y_2| \leq \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + 3x_2^2} \cdot \sqrt{(y_1 - y_2)^2 + 3y_2^2}$$

由于$(f(x), g(x)) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$是闭区间$[0, 1]$上连续实函数组成的线性空间上的内积, 所以我们有下面不等式

$$\left|\int_0^1 f(x)g(x)dx\right| \leq \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 dx} \cdot \sqrt{\int_0^1 |g(x)|^2 dx}.$$

定义. 设V是欧氏空间, 对于任何非零向量$\alpha, \beta \in V$, 定义向量α, β间的夹角θ为:

$$\cos\theta = \frac{(\alpha, \beta)}{\|\alpha\| \cdot \|\beta\|}$$

注意. 在酉空间子中, 虽然也有柯西-布涅柯夫基不等式, 但是因为(α, β)一般是复数, 所以无法用柯西-布涅柯夫基不等式定义向量的夹角. 因为余弦函数值是实数.

定义. 在内积空间V中, 如果两向量α, β的内积$(\alpha, \beta) = 0$, 则称α, β正交(或垂直), 记为$\alpha \perp \beta$.

注意. 在酉空间子中, 虽然没有向量的夹角, 但是仍然有正交的概念.

定理. 如果α,β正交，则

$$\|\alpha+\beta\|^2=\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2$$

证明.

$$\|\alpha+\beta\|^2=\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2+2\mathbf{Re}(\alpha,\beta)$$

由于$(\alpha,\beta)=0$, 所以$\|\alpha+\beta\|^2=\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2$

定理. 如果$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$两两正交，则

$$\|\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m\|^2=\|\alpha_1\|^2+\|\alpha_2\|^2+\cdots+\|\alpha_m\|^2.$$

证明. 用数学归纳法证明，请同学们完成.

练习. 习题9.1:2(3),3,6,7,8.