第 1 章　函数与极限

V. 同步练习

第 1 章　函数、极限与连续

1.1　函数及其性质

一、填空题

1. 已知 $f\left(x\right)=ax^2+bx+5$ 且 $f\left(x+1\right)-f\left(x\right)=8x+3$，则 $a=$______；$b=$______；

2. $y=\cos\left(-2x+1\right)$ 的周期为______；

3. 函数 $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0;\\ 0, x=0.\end{cases}$ 的定义域为______；值域为________.

解答：1. $a=$ __4__；$b=$ __-1__

2. 周期为 $\underline{\pi}$；

3. 定义域为 $\underline{\left(-\infty,+\infty\right)}$；值域为 $\underline{\left[-1,1\right]}$；

二、设

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1,\\ -2, & 1<x\le 2.\end{cases}$$

求函数 $f(x+3)$ 的定义域.

解　$\because f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ -2, & 1<x\le 2\end{cases}$

$$\therefore f(x+3)=\begin{cases}1, & 0\le x+3\le 1\\ -2, & 1<x+3\le 2\end{cases}=\begin{cases}1, & -3\le x\le -2\\ -2, & -2<x\le -1\end{cases}$$

故函数 $f(x+3)$ 的定义域: $[-3,-1]$.

三、已知函数 $y=f\left(x\right)=\dfrac{3x+2}{x+m}\left(m\neq\dfrac{2}{3}\right)$，求它的反函数，若函数 $f\left(x\right)$ 的图形与它的反函数的图形重合，求 m.

解　由 $y=\dfrac{3x+2}{x+m}$，解得 $x=\dfrac{my-2}{-y+3}$. 故反函数为 $f^{-1}\left(x\right)=\dfrac{mx-2}{-x+3}$，因 $f\left(x\right)$ 的图形

与 $f^{-1}(x)$ 的图形重合，则 $\dfrac{3x+2}{x+m}=\dfrac{mx-2}{-x+3}$，解得 $m=-3$.

四、以下函数中哪些是初等函数，说明理由：

1. $y=|x|$；

2. $y=x^x\ (x>0)$；

3. $y=\begin{cases}-\sin x, 0\le x\le \pi\\ \sin x, \pi<x\le 2\pi\end{cases}$；

4. $y=\begin{cases}1, x\text{为有理数}\\ 0, x\text{为无理数}\end{cases}$.

解. 1. 是，因 $y=|x|=\sqrt{x^2}$ 可看作 $y=\sqrt{u}, u=x^2$ 两个幂函数的复合函数；

2. 是，因 $y=x^x=e^{x\ln x}$ 可看作 $y=e^u, u=xv, v=\ln x$ 的复合函数；

3. 是，因 $y=\begin{cases}-\sin x, 0\le x\le \pi\\ \sin x, \pi<x\le 2\pi\end{cases}=\sin(x+\pi)$；

4. 不是，因不能由基本初等函数经有限次四则运算或复合运算且能由一个数学式子表示

五、设 $f(x)=\begin{cases}-x-1, & x\le 0\\ x & x>0\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}x, & x\le 0\\ -x^2, & x>0\end{cases}$，

求复合函数 $f(g(x)), g(f(x))$.

解：$f(g(x))=\begin{cases}-x-1, x\le 0\\ x^2-1, x>0\end{cases}$，　$g(f(x))=\begin{cases}-x-1, -1\le x\le 0\\ -(1+x)^2, x<-1\\ -x^2, x>0\end{cases}$

六、把半径为 R 的一圆形铁片，自中心处剪去中心角为 α 的一扇形后围成一无底圆锥. 试将这圆锥的体积 V 表为 α 的函数.

解. 设圆锥的半径与高分别为 r,h，则 $2\pi r=R(2\pi-\alpha)$，即 $r=\dfrac{R(2\pi-\alpha)}{2\pi}$，从而

$$h=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{R^2-\frac{(2\pi-\alpha)^2}{4\pi^2}R^2}=\frac{1}{2\pi}R\sqrt{4\pi\alpha-\alpha^2}$$，故

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{R^2}{4\pi^2}\cdot(2\pi-\alpha)^2\cdot\frac{1}{2\pi}R\sqrt{4\pi\alpha-\alpha^2}$$

$$=\frac{R^3}{24\pi^2}(2\pi-\alpha)^2\sqrt{4\pi\alpha-\alpha^2}, 0<\alpha<2\pi$$

1.2 数列的极限

一、填空题

1. 设 $x_n=\dfrac{n-1}{n+1}$, 则当 n 大于正整数 $N=$_____时，$|x_n-1|<10^{-4}$，对于任意正数 ε，当 n 大于正整数 $N=$______时，$|x_n-1|<\varepsilon$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

2. 对于任意正数 ε，存在正整数 $N=$______，当 $n>N$ 时，$\left|\dfrac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n}-0\right|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n}=0$.

3. 设 $\{x_n\}$ 为任一数列，又设对于任意正数 ε，存在正整数 N_1,N_2，当 $n>N_1$ 时，$\left|x_{2n}-A\right|<\varepsilon$，当 $n>N_2$ 时，$\left|x_{2n+1}-A\right|<\varepsilon$，则当 n 大于正整数 $N=$_________时 $\left|x_n-A\right|<\varepsilon$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$______.

解：1. $N=\underline{19999}$ 时，$N=\underline{\left[\dfrac{2}{\varepsilon}-1\right]}$；

2. $N=\underline{\left[\dfrac{|a|}{\sqrt{2\varepsilon}}\right]}$；

3. $N=\underline{\max\{2N_1,2N_2\}+1}$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\underline{A}$.

二、 用数列极限定义证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$.

证. $\forall\varepsilon>0$，要使 $\left|\dfrac{1}{n^2}-0\right|<\varepsilon$，即 $\dfrac{1}{n^2}<\varepsilon$，只要 $n^2>\dfrac{1}{\varepsilon}$，即 $n>\sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon}}$. 取正整数 $N=\left[\sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon}}\right]$, 则当 $n>N$ 时，就有 $\left|\dfrac{1}{n^2}-0\right|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$.

三、若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|x_n\right|=\left|a\right|$，并举例说明反过来未必成立.

解. 因 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，所以 $\forall\varepsilon>0$，存在正整数 $N>0$，当 $n>N$ 时，有 $\left|x_n-a\right|<\varepsilon$，

又因$\left||x_n|-|a|\right|\le|x_n-a|$，所以$\left||x_n|-|a|\right|<\varepsilon$，故$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$.

但反过来未必成立．例如，$x_n=(-1)^n$，则$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=1$，但$\{x_n\}$的极限不存在.

四、设数列$\{x_n\}$有界，又$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，用数列极限定义证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

证. 因数列$\{x_n\}$有界，即存在$M>0$，对任意n，有$|x_n|\le M$．又因$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，即$\forall\varepsilon>0$，令$\varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon}{M}$，存在正整数$N>0$，当$n>N$时，有$|y_n|<\varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon}{M}$，所以$|x_ny_n-0|=|x_n||y_n|<M\dfrac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$，故$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

1.3 函数的极限

一、填空题

1. 极限$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$的定义是：对于$\forall\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当________时，就有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

2. 极限$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$的定义是：对于$\forall\varepsilon>0$，存在$X>0$，当______时，就有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

3. 对于任意的正数ε，存在正数δ =_____，当______时$|5x+2-12|<\varepsilon$，因此$\lim\limits_{x\to2}(5x+2)=12$.

解答：

1、当$\underline{0<x-x_0<\delta}$时；　2、$\underline{x>X}$时；　3、$\underline{\delta}=\underline{\dfrac{\varepsilon}{5}}$，当$\underline{0<|x-2|<\delta}$时。

二、求$f(x)=\dfrac{|x|}{x}$在$x=0$处的左、右极限，并说明$f(x)$在$x=0$处的极限是否存在.

解：$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-x}{x}=-1$，由于$\because\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{|x|}{x}\ne\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{|x|}{x}$，所以$f(x)$在$x=0$处的极限不存在.

三．用极限定义证明$\lim\limits_{x\to2}x^2=4$，且δ等于多少，则当$|x-2|<\delta$时，$|x^2-4|<0.001$?

证：不妨设$|x-2|<1$，即$1<x<3$，从而$|x^2-4|=|x-2|\cdot|x+2|<5|x-2|$，

$\forall\varepsilon>0$，要使 $\left|x^2-4\right|<5\left|x-2\right|<\varepsilon$，只要 $\left|x-2\right|<\dfrac{\varepsilon}{5}$. 于是取 $\delta=\min\left\{1,\dfrac{\varepsilon}{5}\right\}$，则当 $0<\left|x-2\right|<\delta$ 时，就有 $\left|x^2-4\right|<\varepsilon$，因此 $\lim\limits_{x\to 2}x^2=4$.

若 $\varepsilon=0.001$，则 $\delta=\min\left\{1,\dfrac{0.001}{5}\right\}=0.0002$，从而当 $0<\left|x-2\right|<0.0002$ 时，有 $\left|x^2-4\right|<0.001$.

四、用极限定义证明 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x-3}=5$.

证. 因 $\left|\dfrac{x^2-x-6}{x-3}-5\right|=\left|x-3\right|$,

$\forall\varepsilon>0$，要使 $\left|\dfrac{x^2-x-6}{x-3}-5\right|<\varepsilon$，只需 $\left|x-3\right|<\varepsilon$，于是取 $\delta=\varepsilon$，则当 $0<\left|x-3\right|<\delta$，有 $\left|\dfrac{x^2-x-6}{x-3}-5\right|<\varepsilon$，故 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x-3}=5$.

五、 用极限定义证明：函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时极限存在的充要条件是左、右极限各自存在且相等.

证：必要性. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<\left|x-x_0\right|<\delta$ 时，就有 $\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$. 因而，当 $0<x-x_0<\delta$ 时，有 $\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$；同时当 $0<x_0-x<\delta$ 时，有 $\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$.

充分性. 若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$. $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_1>0$，当 $0<x-x_0<\delta_1$ 时，就有 $\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$，也 $\exists\delta_2>0$，当 $0<x_0-x<\delta_2$ 时，有 $\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$. 取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 则当 $0<\left|x-x_0\right|<\delta$ 时，就有 $\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$. 所以 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

1.4 极限的运算法则

一、判断题(正确的结论打“√”，错误的结论打“×”)：

1. 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ 不存在，则 $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)+g(x)]$ 不存在.　（ ）

2. 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$，$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ 均不存在，则 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x)$ 不存在.　（ ）

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=A$，则 $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n)=A$.　（ ）

4. 若 $f(x)>g(x)$，$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ 均存在，则 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) > \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.（ ）

5. $\lim\limits_{x \to a} |f(x)|=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x)=0$.　（ ）

6. $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot \sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x \to 0} x \cdot \lim\limits_{x \to 0} \sin\dfrac{1}{x}=0 \cdot \lim\limits_{x \to 0} \sin\dfrac{1}{x}=0$. 这样计算正确吗?　（ ）

解答：1、(√)；2、(×)；3、(√)；4、(×)；5、(√)；6、(×)

二、填空题

1. 已知 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2+ax+b}{x^2-x-2}=2$，则 $a=$____，$b=$_____；

2. 已知 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(1+a)x^4+bx^3+2}{x^3+x^2-1}=-2$，则 $a=$____，$b=$____；

3. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(2x-3)^{30}(3x-2)^{40}}{(2x+1)^{70}}=$_________.

1. 解答：1、则 $a=2$，$b=-8$；2、则 $a=-1$，$b=-2$；3、$\dfrac{2^{30} \cdot 3^{40}}{2^{70}}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{40}$

三、计算题：

1. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$；　2. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$；

3. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$；　4 $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{1+2+\cdots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)$；　5. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}}$.

解答：1、**解**：$\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}=\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{(x-4)(x-2)}{(x-1)(x-4)}=\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x-2}{x-1}=\dfrac{2}{3}$.；

2、解:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x\left[\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right]}=1;$$

3、解. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}=\dfrac{2}{3}$;

4、解. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+\cdots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{n(n+1)}{n(n+2)}-\dfrac{n}{2}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-n}{2n+4}=-\dfrac{1}{2}$;

5、解. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}}{\dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}}=\dfrac{4}{3}$。

四、设 $f(x)=\begin{cases}e^x+1, x>0,\\ x^2+b, x<0\end{cases}$ 问 b 为何值时，$\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 存在?

解. $f(0-0)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(x^2+b)=b$,

$f(0+0)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(e^x+1)=2$，要使极限 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 存在，必有

$f(0-0)=f(0+0)$，所以，$b=2$.

1.5 极限存在准则 两个重要极限

一、填空题

1. 设 m,n 为正整数，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}=$______；

2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=$______ ；

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-2}{n+1}\right)^{n}=$______.

解答：1、$\dfrac{m}{n}$；2、e^2；3、e^{-3}

二、求下列极限:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x-\sin 2x}{x^3}$；

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$；

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2}$；

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$.

解答：1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x-\sin 2x}{x^3}$；

解. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x-\sin 2x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x}{x}\cdot\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x}{x}\cdot\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{4\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}=1$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$；

解. 当 $x\neq 0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}\sin\dfrac{x}{2^n}}{\sin\dfrac{x}{2^n}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin x}{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin x}{\dfrac{\sin\dfrac{x}{2^n}}{\dfrac{x}{2^n}}}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{\sin x}{x}$；

当 $x=0$ 时， $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}1=1$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2}$；

解. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{2}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{-2}}\right]^{\frac{-2x^2}{x^2+1}}=e^{-2}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$；

解. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(\frac{x+a}{x+a+b}\right)^{x+a}\cdot\left(\frac{x+b}{x+a+b}\right)^{x+b}\right]$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-b}{x+a+b}\right)^{x+a}\cdot\left(1+\frac{-a}{x+a+b}\right)^{x+b}\right]$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{-b}{x+a+b}\right)^{\frac{x+a+b}{-b}\cdot\frac{-b(x+a)}{x+a+b}}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{-a}{x+a+b}\right)^{\frac{x+a+b}{-a}\cdot\frac{-a(x+b)}{x+a+b}}$

$=e^{-b}\cdot e^{-a}=e^{-a-b}$.

三、设 $0<x<\pi$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sec\frac{x}{2}\sec\frac{x}{4}\cdots\sec\frac{x}{2^n}\right)$.

解

$\sec\frac{x}{2}\sec\frac{x}{4}\cdots\sec\frac{x}{2^n}=\frac{1}{\cos\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{\cos\frac{x}{4}}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{\cos\frac{x}{2^n}}$

$=\frac{2\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\cdot\frac{2\sin\frac{x}{4}}{2\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}}\cdot\cdots\cdot\frac{2\sin\frac{x}{2^n}}{2\sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2^n}}=\frac{2\sin\frac{x}{2}}{\sin x}\cdot\frac{2\sin\frac{x}{4}}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\cdots\cdot\frac{2\sin\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^{n-1}}}$

$=\frac{2^n\sin\frac{x}{2^n}}{\sin x}$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sec\frac{x}{2}\sec\frac{x}{4}\cdots\sec\frac{x}{2^n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n\sin\frac{x}{2^n}}{\sin x}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x}{\sin x}\frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}=\frac{x}{\sin x}$

四、利用极限存在准则证明以下极限存在，并求极限.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+n)^2}\right)$；

解. 因 $\frac{n+1}{(n+n)^2} \le \frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+n)^2} \le \frac{n+1}{n^2}$,

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2}=0, \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{(n+n)^2}=0$,

由夹逼原理知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+n)^2}\right)=0$.

2. 若 $x_1=a>0, y_1=b>0, a<b, x_{n+1}=\sqrt{x_n y_n}, y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}$，试证数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 存在且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

证: 由不等式 $\frac{x+y}{2}\ge\sqrt{xy}$，知 $x_{n+1}\le y_{n+1}$，于是有

$x_{n+1}=\sqrt{x_n y_n}\ge\sqrt{x_n x_n}=x_n$， $y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}\le\frac{y_n+y_n}{2}=y_n$，从而有

$a\le x_{n+1}\le y_{n+1}\le b$，因此数列 $\{x_n\},\{y_n\}$ 都是单调有界的，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n, \lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 都存在，设

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\alpha, \lim\limits_{n\to\infty}y_n=\beta$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n y_n}=\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n)}$，即 $\alpha=\sqrt{\alpha\beta}$，所以

$\alpha=\beta$.

1.6 无穷小与无穷大

一、填空题

1. 当 $x\to0$ 时，$\ln(1+x)$ 是 x 的_____ 无穷小量；

2. 当 $x\to\infty$ 时，若 $f(x)=\frac{px^2-2}{x^2+1}+3qx+5$ 为无穷大量，则 p 为 _____，q 为_____，若 $f(x)$ 为无穷小量，则 $p=$_____，$q=$______；

3. $\lim\limits_{x\to0}x^3\cos\frac{1}{x^3}=$_______.

解答：1、<u>等价</u> 无穷小量； 2、 p 为 <u>任意常数</u>，q 为 <u>非零常数</u>，$p=\underline{-5}$，$q=\underline{0}$.

3. $\underline{0}$

二、选择题

1. 当 $x\to 0$ 时，$\arctan x$ 与 $\dfrac{ax}{\cos x}$ 是等价无穷小，则 $a=$（　　）；

（A）-1；　　（B）1；　　（C）2；　　（D）-2.

2. 当 $x\to\infty$ 时, 若 $\dfrac{1}{ax^2+bx+c}\sim\dfrac{1}{x+1}$，则 a,b,c 为（　　）；

（A）$a=0,b=1,c$ 任意；　　（B）$a=0,c=1,b$ 任意；

（C）$b=0,c=1,a$ 任意；　　（D）$a=0,b=1,c=0$.

3. 当 $x\to 1$ 时，$f(x)=\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$ 与 $g(x)=x-1$ 都是无穷小，则 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的（　　）阶无穷小?

（A）1；　　（B）2；　　（C）$\dfrac{1}{3}$；　　（D）3 .

解答：1、(B)；2、(A)　　；

3、(C)

解．由 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{\left[g(x)\right]^k}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}}{(1-x)^k}\overset{1-\sqrt{x}=t^3}{=}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\left(2t^3-t^6\right)^k}$，可见，若取 $k=\dfrac{1}{3}$，则

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{\left[g(x)\right]^k}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\left(2t^3-t^6\right)^k}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$，即 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的 $\dfrac{1}{3}$ 阶无穷小.

三、当 $x\to 0$ 时，$\sqrt[3]{1+ax^2}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小，试求常数 a 的值.

解．因当 $x\to 0$ 时，$\sqrt[3]{1+ax^2}-1\sim\dfrac{1}{3}ax^2$，$\cos x-1\sim-\dfrac{1}{2}x^2$，所以

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+ax^2}-1}{\cos x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{3}ax^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-\dfrac{2}{3}a$，由已知 $-\dfrac{2}{3}a=1$，所以 $a=-\dfrac{3}{2}$.

四、已知 $f(x)=a(x-1)^2+b(x-1)+c-\sqrt{x^2+3}$ 是 x 趋于 1 时 $(x-1)^2$ 的高阶无穷小，求常数 a,b,c.

解．由条件得：$\lim\limits_{x\to 1}\left[a(x-1)^2+b(x-1)+c-\sqrt{x^2+3}\right]=0$，$\therefore c=2$．又

$$\lim_{x\to 1}\frac{a(x-1)^2+b(x-1)+2-\sqrt{x^2+3}}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{a(x-1)+b+\dfrac{1-x^2}{\left(2+\sqrt{x^2+3}\right)(x-1)}}{x-1}=0,$$

$\therefore b=\dfrac{1}{2}$，又

$$\lim_{x\to 1}\frac{a(x-1)^2+\frac{1}{2}(x-1)+2-\sqrt{x^2+3}}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\left(a+\frac{\frac{1}{2}-\frac{1+x}{2+\sqrt{x^2+3}}}{x-1}\right)$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(a+\frac{\sqrt{x^2+3}-2x}{2\left(2+\sqrt{x^2+3}\right)(x-1)}\right)=\lim_{x\to 1}\left(a+\frac{3\left(1-x^2\right)}{2\left(2+\sqrt{x^2+3}\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2x\right)(x-1)}\right)=0$$

$$\therefore a=\frac{3}{16}$$

1.7 函数的连续性

一、讨论下列函数在指定点的连续性，并将结论填入括号内:

1. $f(x)=\begin{cases} x^2,0\le x\le 1 \\ 2-x,1<x\le 2 \end{cases}$，在点 $x=1$ 处（　　）；

2. $g(x)=x|x|$ 在点 $x=0$ 处（　　）；

3. $h(x)=\begin{cases} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}},x\ne 0, \\ 0,x=0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处（　　）；

4. $I(x)=\begin{cases} e^x,x<0, \\ 2,x=0, \\ \frac{\sin x}{x},x>0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处（　　）.

解答 1、（ 连续）;2、（ 连续）；3、（ 跳跃间断点）；4、（ 可去间断点）

二、 下列函数在指定点间断，说明这些点属于哪一类间断点，如果是可去间断点，则补充或改变函数的定义使它连续.

1. $x=1,x=2$ 分别是函数 $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 的 ______间断点，补充____，则函数在此点连续.

2. $x=0$ 为函数 $f(x)=\frac{\sin 2x}{3x}$ 的______ 间断点，补充定义 $f(0)=$ ___，则函数在 $x=0$ 处连续.

3. $x=0$ 为 $f\left(x\right)=\cos^2\dfrac{1}{x}$ 的______间断点，为 $f\left(x\right)=\begin{cases}\arctan\dfrac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$ 的______间断点.

解答：1、可去、无穷 间断点， $f\left(1\right)=-2$；

2、可去 间断点，补充定义 $f\left(0\right)=\dfrac{2}{3}$；

3、第二类振荡型 间断点，第一类跳跃 间断点.

三、适当选取 a，使函数 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<0\\ a+x & x\geq 0\end{cases}$ 连续.

解．$\because f\left(0\right)=a=f\left(0-0\right)=e^0=1$，$\therefore$ 当 $a=1$ 时，$f\left(x\right)$ 即为连续函数.

四、已知 $f\left(x\right)=\begin{cases}\left(1+3x\right)^{\frac{1}{x}}, x<0\\ a, x=0,\\ \dfrac{b\sin 3x}{x}, x>0\end{cases}$，问

1. 当 a,b 为何值，$\lim\limits_{x\to 0} f\left(x\right)$ 存在 ？

2. 当 a,b 为何值，$f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 上连续 ？

解．1. 因 $\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+3x\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+3x\right)^{\frac{1}{3x}\cdot 3}=e^3$，

$\lim\limits_{x\to 0^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{b\sin 3x}{x}=b\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot 3=3b$， 故当 $\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^-} f\left(x\right)$ 时，即 $e^3=3b$，$b=\dfrac{e^3}{3}$ 时，$\lim\limits_{x\to 0} f\left(x\right)$ 存在；

2. $f\left(x\right)$ 为分段函数，且在 $\left(-\infty,0\right),\left(0,+\infty\right)$ 内均为初等函数，故连续；在分段点 $x=0$ 处，当 $\lim\limits_{x\to 0} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^-} f\left(x\right)=f\left(0\right)=a$，即 $e^3=3b$，$a=e^3$ 时，$f\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处连续，从而 $a=e^3$，$b=\dfrac{e^3}{3}$ 时，$f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 上连续.

五、求下列函数的极限：

1. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1+x}}$；　　**解**. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1+x}}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{0}{2}}=1$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\arctan x)^{\cos\frac{1}{x}}$；　**解**. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\arctan x)^{\cos\frac{1}{x}}=\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{1}=\dfrac{\pi}{2}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$；**解**. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}}\right]^{\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}}\cdot\frac{1}{4}}=e^{-\frac{1}{2}}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+ax)}{x}$.

解. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+ax)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+ax)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim\limits_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}$

$$=\ln\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{ax}\cdot a}=\ln e^{a}=a$$

六、证明方程$x=a\sin x+b\,(a>0,b>0)$至少有一正根，并且它不超过$a+b$.

证. 设$f(x)=a\sin x+b-x$，$f(x)$在$[0,a+b]$上连续，且

$f(0)=b>0, f(a+b)=a\sin(a+b)-a=a[\sin(a+b)-1]\le 0$.

当$\sin(a+b)\ne 1$，则$f(a+b)<0$，由零点定理，在$(0,a+b)$内至少有一点ξ，使得$f(\xi)=0$，即$a\sin\xi+b=\xi$，亦即方程$x=a\sin x+b$在$(0,a+b)$内至少有一正根.

当$\sin(a+b)=1$时，有$f(a+b)=0$，即方程$f(x)=0$有一正根$a+b$，故方程$x=a\sin x+b$至少有一个不超过$a+b$的正根.

七、设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$f(a)<a, f(b)>b$，证明在(a,b)上至少存在一点ξ，使$f(\xi)=\xi$.

证. 令$F(x)=f(x)-x$，则$F(x)$在$[a,b]$上连续，且

$F(a)=f(a)-a<0, F(b)=f(b)-b>0$，由零点定理，在$(a,b)$内至少存在一点$\xi$，使$F(\xi)=0$，即$f(\xi)=\xi$.