高等数学A

第1章 函数与极限

1.2 数列的极限

1.2.1 数列极限的概念　1.2.2 数列极限的性质

中南大学开放式精品示范课堂高等数学建设组

1.2 数列的极限

数列极限

- **1.2.1 数列极限的概念**
  - 数列的定义
  - 数列极限的定义
    - 实例与描述性定义
    - 数列极限的精确定义
    - 数列极限的几何解释
- 用定义验证数列极限
  - 步骤
  - 数列的极限习例1-6
- **1.2.2 数列极限的性质**
  - 极限的唯一性
  - 收敛数列的有界性
  - 收敛数列的保号性
  - 收敛数列与其子数列的关系

一、数列极限

概念的引入

(1) 割圆术：

“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣”　　——刘徽

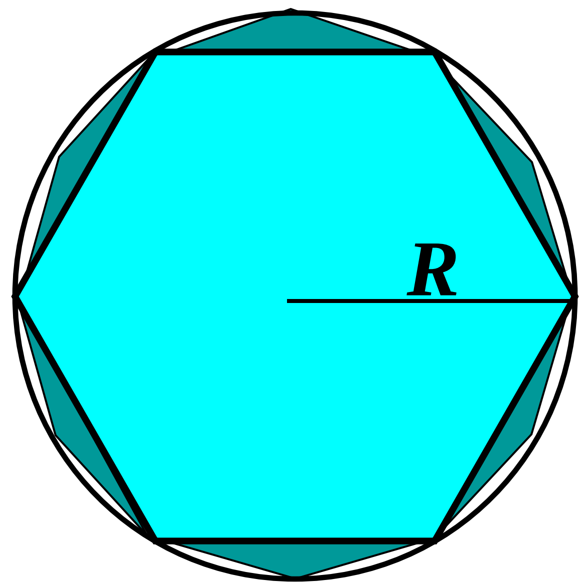
正六边形的面积 A_1

正十二边形的面积 A_2

……　　……

正 $6\times 2^{n-1}$ 形的面积 A_n

$A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, \cdots \Longrightarrow S$



(2) 截丈问题：

“一尺之棰，日截其半，万世不竭”

1. 数列的定义

按一定顺序排列的无穷多个数 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$

称为无穷数列, 记为$\{x_n\}$或x_n.

第n项x_n称为数列的一般项或通项.

例如

$2,4,8,\cdots,2^n,\cdots;$ $\{2^n\}$

$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots;$ $\{\frac{1}{2^n}\}$

$1,-1,1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots;$ $\{(-1)^{n-1}\}$

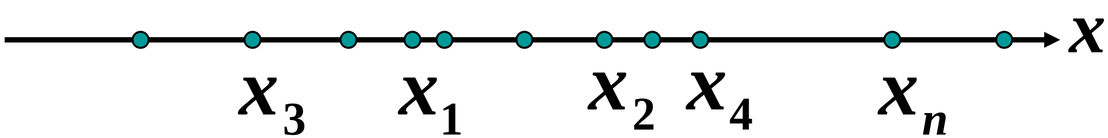
$2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\cdots,\frac{n+(-1)^{n-1}}{n},\cdots;$ $\{\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}\}$

$\sqrt{3},\sqrt{3+\sqrt{3}},\cdots,\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{\cdots+\sqrt{3}}}},\cdots$

从函数观点看，数列是以自然数为自变量的整标函数

$$x_n = f(n)$$

从几何上看，数列是数轴上的动点.



数列的单调性: 若$x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n \le \cdots$,则称$x_n$单增;

若$x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_n \ge \cdots$,则称$x_n$单减.

数列的有界性:

若存在$M > 0$,使得对一切x_n都有$|x_n| \le M$,

则称x_n有界;若这样的M不存在,则称x_n无界.

2. 数列极限的定义

实例分析与描述性定义

(1) $x_n = 1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$　　x_n无限接近1

(2) $x_n = n$　　x_n无限增大

(3) $x_n = (-1)^{n+1}$　　x_n在$1,-1$上跳动,不确定

思考1: 当 n 无限增大时, x_n是否无限接近于某一确定的数值?如果是,如何确定?

思考2: “无限接近”意味着什么?如何用数学语言刻划它.

x_n与1的接近程度可用$|x_n - 1|$来度量, $|x_n - 1|$越小, x_n与1就越接近.

$\because \quad \left|x_n - 1\right| = \left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$

可见,当n越大,$\frac{1}{n}$越小,从而x_n就越接近1.

要使 $\left|x_n - 1\right| < \frac{1}{100}$, 只要 $n > 100$;

要使 $\left|x_n - 1\right| < \frac{1}{1000}$, 只要 $n > 1000$;

要使 $\left|x_n - 1\right| < \frac{1}{10000}$, 只要 $n > 10000$;

要使 $\left|x_n - 1\right| < \varepsilon$成立, 只要 $n > N(=[\frac{1}{\varepsilon}])$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N = [\frac{1}{\varepsilon}]$,当$n > N$时有$\left|x_n - 1\right| < \varepsilon$,

此时达到了"当n无限增大时,x_n无限接近1".

数列极限的精确定义

$(\varepsilon-N)$定义　设有数列x_n及常数a,

若$\forall\varepsilon>0,\exists N>0,$当$n>N$时有$|x_n-a|<\varepsilon$成立,

则称a是数列x_n的极限或称x_n收敛于a.记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a \quad \text{或} \quad x_n\to a(\text{当}n\to\infty\text{时})$$

注意:

(1)不等式$|x_n-a|<\varepsilon$刻划了x_n与a的无限接近;

(2)要描述x_n与a接近的无限性,就要引进任意小的正数ε,因为任何一个确定的数都不能说明这种无限性;

(3)ε具有两重性：一方面任意;另一方面给定后相对稳定,对指定的ε确定是否存在N;

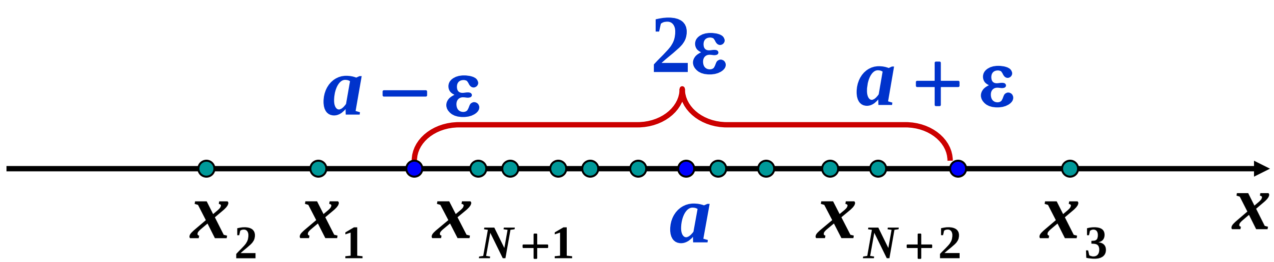
(4)N随ε的指定而确定,可记为$N(\varepsilon)$,但并不由ε唯一确定;

(5)数列极限的定义没有给出求极限的方法，只能验证.

数列极限的几何解释

由$n>N$时$|x_n-a|<\varepsilon$, 可得$n>N$时有$a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$

即所有下标大于N的$x_n(x_{N+1},x_{N+2},\cdots)$都落在$a$的$\varepsilon$邻域内.



这样在$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$外只有有限项 $x_1,x_2,\cdots,x_N$,
而在其内有无穷多项. 且随着ε越小，N越大，则在$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$外的项就越多，但不管怎么多都只可能是有限项.

3. 用定义验证数列极限

步骤: (1)放大并化简 $|x_n - a| < \varphi(n)$

(2) $\forall \varepsilon > 0$, 要使 $|x_n - a| < \varepsilon$, 只要 $\varphi(n) < \varepsilon$,

由 $\varphi(n) < \varepsilon$, 解得 $n > N(\varepsilon)$,

取 $N = [N(\varepsilon)]$, 或 $N = [N(\varepsilon)] + 1$, 或 $N = [N(\varepsilon) + 1]$.

(3)得出结论: 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < \varepsilon$ 成立.

$$\therefore \lim_{n \to \infty} x_n = a.$$

注意: (1) 由于 N 不唯一,不要求最小的 N,故可把 $|a_n - a|$ 适当放大,得到一个新的不等式,再寻找 N.

(2)从 $|a_n - a| < \varepsilon$ 找 N 与解不等式 $|a_n - a| < \varepsilon$ 意义不同.

用数列极限的定义验证下列数列的极限：

例1. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1$

例2. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}=0$

例3. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$,其中$|q|<1$.

例4. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-6n}{3+2n}=-3$

例5. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2-n})=\dfrac{1}{2}$

例6.设 x_n 有界, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

例1. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1.$

证明: $\because \left|\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right|=\dfrac{1}{n},$

$\forall\varepsilon>0,$ 要使 $\left|\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right|<\varepsilon,$

只要 $\dfrac{1}{n}<\varepsilon,$ 即 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}.$

取 $N=[\dfrac{1}{\varepsilon}],$ 当 $n>N$ 时, 有 $\left|\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right|<\varepsilon$ 成立,

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1.$

Back

例2. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}=0.$

证明: $\because \left|\dfrac{\sin n}{n}-0\right|=\left|\dfrac{\sin n}{n}\right|\le\dfrac{1}{n},$

$\forall\varepsilon>0,$ 要使 $\left|\dfrac{\sin n}{n}-0\right|<\varepsilon,$

只要 $\dfrac{1}{n}<\varepsilon,$ 即 $n>\dfrac{1}{\varepsilon},$

取 $N=[\dfrac{1}{\varepsilon}],$ 当 $n>N$ 时, 有 $\left|\dfrac{\sin n}{n}-0\right|<\varepsilon$ 成立,

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}=0$

Back

例3. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$,其中$|q|<1$.

证明: $q=0$时结论显然成立.

$q\neq 0$时, $\because \left|q^n - 0\right| = |q|^n$,

$\forall \varepsilon > 0$, 要使 $\left|q^n - 0\right| < \varepsilon$,

只要 $|q|^n < \varepsilon$, 即 $n\ln|q| < \ln\varepsilon$,

$$\therefore n > \frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|},$$

取$N=[\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}]$, 当$n>N$时,有$\left|q^n - 0\right| < \varepsilon$成立,

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} q^n = 0.$$

Back

例4. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-6n}{3+2n}=-3.$

证明: $\because \left|\dfrac{1-6n}{3+2n}-(-3)\right|=\dfrac{10}{3+2n}<\dfrac{5}{n},$

$\forall\varepsilon>0,$要使 $\left|\dfrac{1-6n}{3+2n}-(-3)\right|<\varepsilon,$

只要 $\dfrac{5}{n}<\varepsilon,$ 即 $n>\dfrac{5}{\varepsilon}.$

取 $N=[\dfrac{5}{\varepsilon}],$ 当$n>N$时,有 $\left|\dfrac{1-6n}{3+2n}-(-3)\right|<\varepsilon$ 成立,

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-6n}{3+2n}=-3$

Back

例5. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2-n})=\frac{1}{2}$.

证明: $\because \left|n-\sqrt{n^2-n}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{n}{n+\sqrt{n^2-n}}-\frac{1}{2}\right|$

$$=\left|\frac{n-\sqrt{n^2-n}}{2(n+\sqrt{n^2-n})}\right|=\left|\frac{n}{2(n+\sqrt{n^2-n})^2}\right|<\frac{1}{2n}$$

$\forall\varepsilon>0$, 要使 $\left|n-\sqrt{n^2-n}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$

只要 $\frac{1}{2n}<\varepsilon$, 即 $n>\frac{1}{2\varepsilon}$.

取 $N=[\frac{1}{2\varepsilon}]$, 当 $n>N$ 时, 有 $\left|n-\sqrt{n^2-n}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$ 成立,

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2-n})=\frac{1}{2}$

Back

例6. 设 x_n 有界, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$.

证明: $\forall \varepsilon > 0$,

$\because x_n$ 有界,

$\therefore \exists M > 0$, 对于$\forall x_n$,都有$|x_n| \le M$.

又 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$,

对于$\dfrac{\varepsilon}{M} > 0$,$\exists N > 0$,当$n > N$时,有$|y_n| < \dfrac{\varepsilon}{M}$.

$$\therefore |x_n y_n - 0| = |x_n||y_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0.$$

Back

4. 数列极限的性质

定理1(极限的唯一性) 如果一数列收敛，那么它的极限唯一.

$$即若 \lim_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim_{n\to\infty} x_n = b, 则\ a = b.$$

证明： 用反证法. 假设：$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} x_n = b$, 且$a \neq b$, 不妨设$a < b$.

取$\varepsilon = (b-a)/2 > 0$, 于是有

$$\exists N_1 > 0, 当\ n > N_1 时，有\ |x_n - a| < \varepsilon,$$

$$\exists N_2 > 0, 当\ n > N_2 时，有\ |x_n - b| < \varepsilon,$$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 当$n > N$时, 则有

$$b - a = (b - x_n) + (x_n - a) \le |x_n - b| + |x_n - a| < \varepsilon + \varepsilon < b - a.$$

这一矛盾证明了：$a = b$.

定理2(有界性) 收敛数列必有界.

证明: $\because \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,$

取$\varepsilon = 1, \exists N > 0,$ 当$n > N$时, 有$|x_n - a| < \varepsilon = 1$

对于$n > N,$

$$|x_n| = |(x_n - a) + a| \le |x_n - a| + |a| < 1 + |a|$$

取$M = \max\{|x_1|, \ldots, |x_N|, 1 + |a|\}$

对于一切x_n, 都有 $|x_n| \le M.$

$\therefore \{x_n\}$是有界的.

推论: 无界数列必定发散.

定理3(收敛数列的保号性) 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 且 $a > 0$ (或 $a < 0$), 那么存在整数 $N > 0$, 当 $n > N$ 时, 都有 $x_n > 0$ (或 $x_n < 0$).

证明: 不妨假设 $a > 0$， $\because \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,

取 $\varepsilon = a/2 > 0, \exists N > 0$, 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < \varepsilon = a/2$

从而，当 $n > N$ 时,

$$x_n > a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} > 0$$

推论： 如果数列从某项起有 $x_n > 0$ (或 $x_n < 0$)，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ ，那么有 $a \geq 0$ (或 $a \leq 0$).

定理4 若数列x_n收敛于a,则它的任一子数列收敛于a.

即若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 则 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$.

注意: (1)定理1的几何解释:

若数列以a为极限,在$U(a,\varepsilon)$内有下标大于N后的x_n的无限个点,则在$U(b,\varepsilon)$内只有x_n的有限个点,即不以b为极限.

(2)定理2为必要条件定理，反过来，有界数列不一定收敛

如$x_n = (-1)^{n+1}$为发散数列,但$|x_n| \le 1$.

(3)在$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$内有$x_n$的无穷多项,则$x_n$是否以$a$为极限?

(4)ε是一个很小很小的正数吗?

(5)极限定义中的N是否唯一?

(6)一数列的两个子数列收敛于不同的极限,则数列发散.一个发散数列可能有收敛的子列.

例7 判别 $\{x_n\}=\{\sin\frac{n\pi}{8}\}$ 的敛散性.

解 **利用函数的周期性, 在$\{x_n\}$中取两个子数列:**

(1) 令 $n=8k,\ k\in N$, 得子数列:

$$\{\sin\frac{n\pi}{8}\}=\{\sin k\pi\}:\ \sin\pi,\ \sin 2\pi,\ \cdots,\ \sin k\pi,\ \cdots$$

由于 $\sin k\pi=0,\ \ k\in N$, 所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin k\pi=\lim\limits_{n\to+\infty}0=0.$

(2) 令 $n=16k+4,\ \ k\in N$, 得子数列:

$$\{\sin\frac{n\pi}{8}\}=\{\sin(2k\pi+\frac{\pi}{2})\}:\ \sin\frac{5\pi}{2},\cdots,\sin(2k\pi+\frac{\pi}{2}),\cdots$$

此时 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin(2k\pi+\frac{\pi}{2})=\lim\limits_{n\to+\infty}1=1.$

故由推论可知: $\{\sin\frac{n\pi}{8}\}$ 是发散的(即极限不存在).

补充的内容：

“ε−N”语言的运用：

由一个已知极限存在的数列，证明另一个数列的极限.

方法：

对已知极限存在的数列应用“ε−N”语言，再从中变形成所要证明的数列极限的“ε−N”语言形式。

例8　设$x_n > 0$, 且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a > 0$,

求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n} = \sqrt{a}$.

证　任给$\varepsilon > 0$,　$\because \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,

$\therefore \exists N$使得当$n > N$时恒有$|x_n - a| < \varepsilon_1$,

从而有$\left|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}\right| = \dfrac{|x_n - a|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} < \dfrac{|x_n - a|}{\sqrt{a}} < \dfrac{\varepsilon_1}{\sqrt{a}} = \varepsilon$

故$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n} = \sqrt{a}$.

例9 对于数列 x_n，若 $x_{2k} \to a$（$k \to \infty$），$x_{2k+1} \to a$（$k \to \infty$），证明：$x_n \to a$（$n \to \infty$）.

证. $\forall \varepsilon > 0$，$\because x_{2k} \to a\ (k \to \infty)$，$\therefore \exists K_1 \in Z$，只要 $2k > 2K_1$，就有 $|x_{2k} - a| < \varepsilon$；

又因 $x_{2k+1} \to a\ (k \to \infty)$，$\therefore \exists K_2 \in Z$，只要 $2k+1 > 2K_2 + 1$，就有 $|x_{2k+1} - a| < \varepsilon$.

取 $N = \max\{2K_1, 2K_2 + 1\}$，只要 $n > N$，就有 $|x_n - a| < \varepsilon$，因此有 $x_n \to a$（$n \to \infty$）.

例10 若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，证明$\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$，并举反例说明反之不一定成立.

证明：$\because \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，由定义有：$\forall \varepsilon > 0, \exists N$，当$n > N$时恒有$|x_n - a| < \varepsilon$

又 $\because \big||x_n| - |a|\big| \le |x_n - a| < \varepsilon$

对上述同样的ε和N，当$n > N$时，都有$\big||x_n| - |a|\big| < \varepsilon$成立

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$

反之,不一定成立.如取$x_n = (-1)^n, n = 1, 2, \cdots$

显然 $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = 1$，但$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$不存在.

练习

4．设$\{x_n\}$为任一数列，又设对于任意正数ε，存在正整数N_1，N_2，当$n > N_1$时，$|x_{2n} - A| < \varepsilon$，当$n > N_2$时，$|x_{2n+1} - A| < \varepsilon$，则当$n$大于正整数$N =$__________时$|x_n - A| < \varepsilon$，因此$\lim\limits_{n\to\infty} x_n =$__________.

解 $N = \max\{2N_1, 2N_2 + 1\}$