高等数学A

第1章 函数与极限

1.7 函数的连续性

1.7.1 连续函数的定义　　1.7.2 函数的间断点及其分类
1.7.3 连续函数的运算　　1.7.4 闭区间上连续函数的性质
1.7.5 函数的一致连续性　1.7.6 压缩映射原理与迭代法

中南大学开放式精品示范课堂高等数学建设组

1.7 函数的连续性

函数的连续性

- 1.7.1 连续函数的定义
  - 函数在一点处连续的定义
  - 函数在区间上的连续性
- 1.7.2 函数的间断点及其分类
  - 间断点的定义
  - 连续性讨论习例2-6
  - 间断点的分类
- 1.7.3 连续函数的运算与初等函数的连续性
  - 连续函数的运算
  - 初等函数的连续性
  - 习例7-12
- 1.7.4 闭区间上连续函数的性质
  - 最值定理
  - 有界定理
  - 零点定理
  - 介值定理
  - 应用习例14-20
- 1.7.5 函数的一致连续性
- 1.7.6 压缩映射原理与迭代法

一、连续函数的定义

1.增量 设变量 u 从 u_1 变到 u_2，则称 u_2-u_1 为 u 的增量，记为

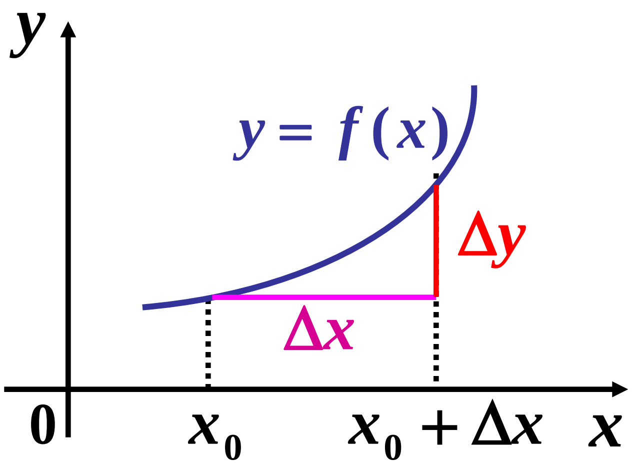
$$\Delta u = u_2 - u_1.$$

对于函数 $y=f(x)$，当自变量 x 由 $x_0 \to x_0+\Delta x$，

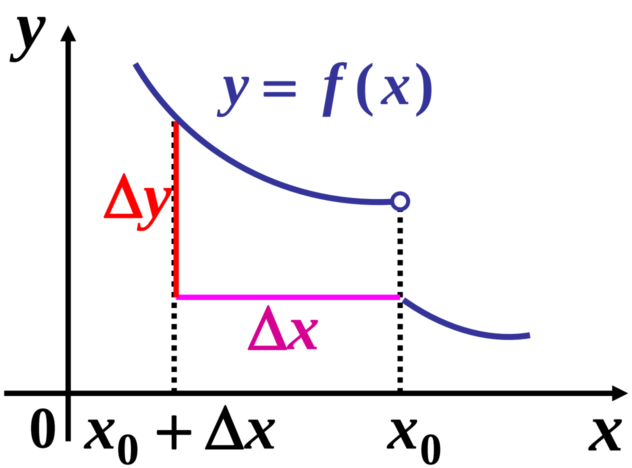
相应地函数值由 $f(x_0) \to f(x_0+\Delta x)$，则称

$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ 为函数的增量.

一般地， Δy 随 Δx 的变化而变化.



$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$$



$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y \neq 0$$

2.函数$y=f(x)$在x_0处的连续性定义

定义1 设$y=f(x)$定义在$U(x_0,\delta)$,

若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$, 则称$y=f(x)$在 x_0处连续.

设$y=f(x)$定义在$U(x_0,\delta)$,

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, 则称$y=f(x)$在 x_0处连续.

"$\varepsilon-\delta$"定义:

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 使当$|x-x_0|<\delta$时, 恒有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

可见，$f(x)$在x_0处连续必须满足三个条件:

(1)定义在$U(x_0,\delta)$ (2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在 (3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

3.左右连续定义

若函数$f(x)$在$(a, x_0]$内有定义,且$f(x_0 - 0) = f(x_0)$,则称$f(x)$在点x_0处左连续;

若函数$f(x)$在$[x_0, b)$内有定义,且$f(x_0 + 0) = f(x_0)$,则称$f(x)$在点x_0处右连续.

注意:

(1)$f(x)$在x_0连续与它在该点左右连续的关系有如下结论:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$$

(2)对于区间的左端点只要右连续则称为连续;
对于区间的右端点只要左连续则称为连续.

4.函数在区间上的连续性

在区间上每一点都连续的函数, 叫做在该区间上的连续函数, 或者说函数在该区间上连续.

如果函数在开区间 (a,b)内连续, 并且在左端点 $x=a$处右连续, 在右端点 $x=b$处左连续, 则称函数 $f(x)$在闭区间 $[a,b]$上连续.

对于区间端点上的连续性则按左右连续来确定!

连续函数的图形是一条连续而不间断的曲线.

例1 证明函数 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

证 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})$$

$$|\Delta y| = 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|\left|\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\right|$$

$$\le 2\left|\frac{\Delta x}{2}\right|\cdot 1 = |\Delta x| \xrightarrow{\Delta x \to 0} 0$$

即 $$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

由x的任意性，知 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

类似可证: 函数 $y = \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

二、函数的间断点及其分类

1.间断点的定义

若$f(x)$至少满足下列条件之一，则称$f(x)$在x_0处不连续，x_0为$f(x)$的间断点.

(1) $f(x_0)$无意义

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

2.连续性讨论习例

例2.设$f(x)=|\operatorname{sgn} x|$,讨论$x=0$处的连续性.

例3.设$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$,讨论$x=0$处的连续性.

例4.设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x^2-1|}{x-1}, & x\neq 1\\ 2, & x=1\end{cases}$,讨论$x=1$处的连续性.

例5.设$f(x)=\dfrac{1}{x}$,讨论$x=0$处的连续性.

例6.设$f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$,讨论$x=0$处的连续性.

例2.设$f(x)=|\operatorname{sgn} x|$,讨论$x=0$处的连续性.

解: $\because f(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$, 又$f(0)=0$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$,

但$\lim\limits_{x\to 0} f(x)\neq f(0)$,

$\therefore f(x)$在$x=0$处不连续, $x=0$为$f(x)$的间断点.

若令$f(0)=1$,改变$f(x)$在$x=0$处的定义, 则$f(x)$在$x=0$处连续了.

这种间断点称为可去间断点.

Back

例3.设$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$,讨论$x=0$处的连续性.

解: $\because f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$在$x=0$处没有意义,

$\therefore x=0$为$f(x)$的间断点.

又$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$,

若令$f(0)=1$,补充$f(x)$在$x=0$处的定义,

则$f(x)$在$x=0$处连续了.

这种间断点也称为可去间断点.

例4.设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x^2-1|}{x-1}, & x\neq 1\\ 2, & x=1\end{cases}$,讨论$x=1$处的连续性.

解: $\because f(1)=2$有定义,

$$f(1+0)=\lim_{x\to 1^+}\frac{|x^2-1|}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}(x+1)=2,$$

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1^-}\frac{|x^2-1|}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{1-x^2}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}-(x+1)=-2,$$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1}f(x)$不存在, 故$x=1$为$f(x)$的间断点.

函数图形在间断点x=1处发生跳跃，故称跳跃间断.

Back

例5.设$f(x)=\dfrac{1}{x}$,讨论$x=0$处的连续性.

解: $\because f(x)=\dfrac{1}{x}$在$x=0$处没有意义,

$\therefore x=0$为$f(x)$的间断点.

又$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$,

这时称$x=0$为$f(x)$的无穷间断点.

Back

例6.设$f(x)=\sin\frac{1}{x}$,讨论$x=0$处的连续性.

解: $\because f(x)=\sin\frac{1}{x}$在$x=0$处没有意义,

$\therefore x=0$为$f(x)$的间断点.

又$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$不存在,

且当$x\to 0$时,$\sin\frac{1}{x}$在-1与1之间振动无限多次,

这时称$x=0$为$f(x)$的振荡间断点.

Back

3.间断点的分类

间断点是根据左右极限是否存在进行分类的!

设x_0为$f(x)$的间断点,

(1)若$f(x_0+0)$与$f(x_0-0)$都存在,则称x_0为第一类间断点;

(2)若$f(x_0+0)$与$f(x_0-0)$至少有一个不存在,

则称x_0为第二类间断点;

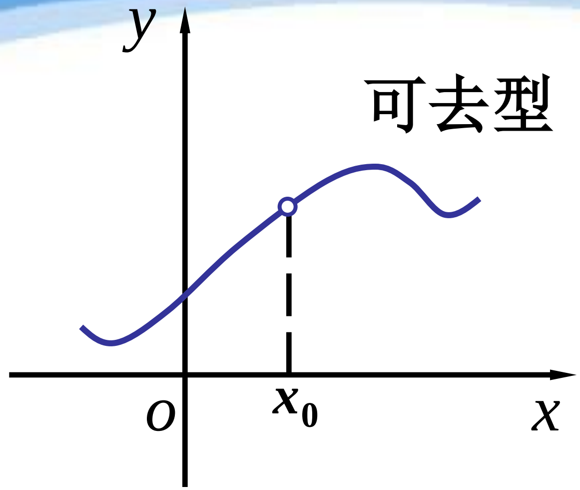
可去间断点 (左右极限存在且相等的间断点)

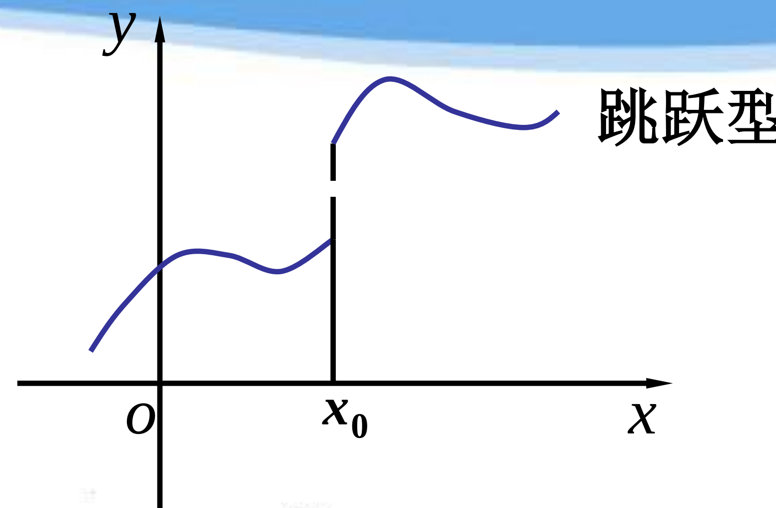
跳跃间断点 (左右极限存在但不相等的间断点)

无穷间断点 (极限为无穷大的间断点)

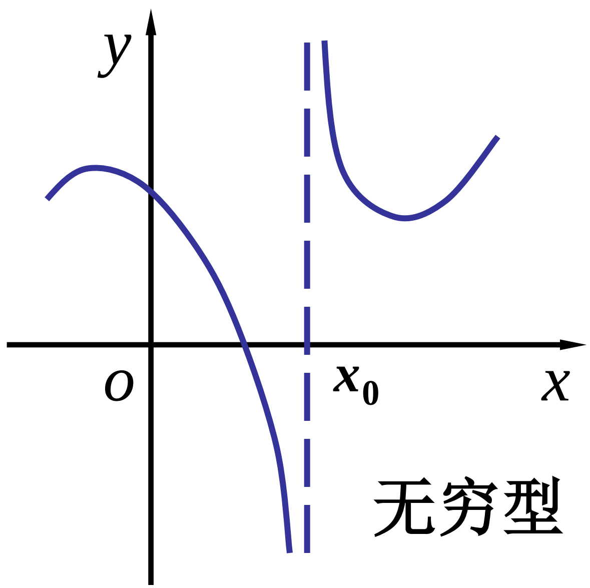
振荡间断点 (极限不确定的间断点)

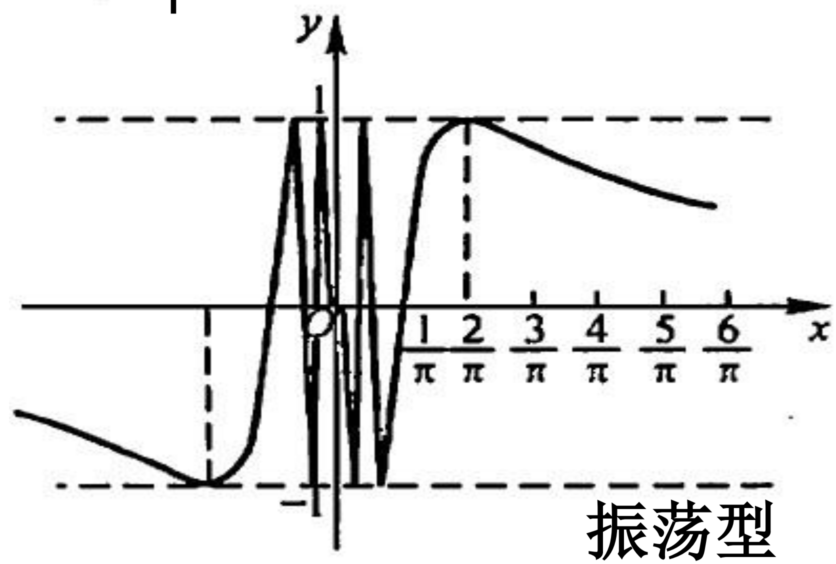
第一类间断点





第二类间断点





各类间断点示意图

三、连续函数的运算与初等函数的连续性

1.连续函数的运算

定理1（连续函数的和差积商还是连续函数）

若函数 $f(x), \ g(x)$ 在点 x_0 处连续，则 $f(x) \pm g(x)$，

$f(x) \cdot g(x), \ \dfrac{f(x)}{g(x)} \ (g(x_0) \neq 0)$ 在点 x_0 处也连续.

证明： $\because \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0), \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$，则

$$\lim_{x \to x_0}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) \pm g(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) \cdot g(x_0)$$

定理2 （连续函数的反函数连续）

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 I_x 上单调增加(或单调减少)且连续，那么它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 也在对应的区间 $I_y=\{y \mid y=f(x), x\in I_x\}$ 上单调增加(或单调减少)且连续.

即，严格单调的连续函数必有严格单调的连续反函数.

定理3 （复合函数的连续性）

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，函数 $f(u)$ 在点 a 连续，

则有 $\lim\limits_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=f(a)=f[\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)]$.

证明：$\because f(u)$ 在点 $u=a$ 连续，

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\eta>0$，使当 $|u-a|<\eta$ 时，

恒有 $|f(u)-f(a)|<\varepsilon$ 成立.

又$\because \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = a,$

对于$\eta > 0$, $\exists \delta > 0$, 使当$0 < |x - x_0| < \delta$时,

恒有$|\varphi(x) - a| = |u - a| < \eta$成立.

将上两步合起来:

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使当$0 < |x - x_0| < \delta$时,

$|f(u) - f(a)| = |f[\varphi(x)] - f(a)| < \varepsilon$ 成立.

$$\therefore \lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = f(a) = f[\lim_{x \to x_0} \varphi(x)].$$

当函数连续时，极限符号与函数符号可以交换位置。

定理4 （连续函数的复合函数是连续函数）

设函数 $y=f[g(x)]$ 由函数 $u=g(x)$ 与函数 $y=f(u)$ 复合而成，$\overset{\circ}{U}(x_0)\subseteq D_{f\circ g}$

若函数 $g(x)$ 在点 x_0 连续，且 $g(x_0)=u_0$，函数 $f(u)$ 在点 u_0 连续，则复合函数

$y=f[g(x)]$ 在点 x_0 也连续.

证 因函数 $u=g(x)$ 在点 x_0 连续，所以 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)$，即 $\lim\limits_{x\to x_0} u=u_0$.

由复合函数的极限运算法则得：

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)] \overset{u=g(x)}{=\!=\!=} \lim_{u\to u_0} f(u)=f(u_0)=f[g(x_0)].$$

故 $y=f[g(x)]$ 在点 x_0 连续.

2.初等函数的连续性

(1)基本初等函数在其定义区间内是连续的.

三角函数的连续性:

$$\left.\begin{array}{l} y=\sin x\text{在}(-\infty,+\infty)\text{内连续} \\ y=\cos x\text{在}(-\infty,+\infty)\text{内连续} \end{array}\right\}\text{----由连续的定义可证.}$$

$$\left.\begin{array}{l} y=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x} \\ y=\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x} \\ y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x} \\ y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x} \end{array}\right\}\text{----由连续性的四则运算可证.}$$

反三角函数的连续性: 由反函数的连续性得到.

对数函数的连续性:

$y=\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 内连续 ----已证

$$y=\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}$$ 也在 $(0,+\infty)$ 内连续

指数函数的连续性:

$y=a^x, y=e^x$ ----由反函数的连续性得到.

幂函数的连续性:

$y=x^\mu=e^{\mu\ln x}$ ----由复合函数的连续性得到.

(2)定理5 初等函数在其定义区间内是连续的.

注意:

(1)弄清楚定义域, 定义区间, 连续区间的关系; 并会求求函数的连续区间.

(2)记住初等函数的连续区间即为定义区间; 而分段函数需考虑分段点的情况.

(3)利用函数的连续性可求极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

3.习例

例7.求 $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{-\sin x}$ 的定义域,有连续区间吗?

例8.求 $y=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x<0\\ x^2-1, & x\geq 0\end{cases}$ 连续区间.

例9.当a取何值时,函数

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & x<0,\\ a+x, & x\geq 0,\end{cases}$$ 在 $x=0$处连续.

例10.计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}\quad(a>0,a\neq 1)$.

例11.计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+e)-1}{x}$.

例12.计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^a-1}{x}$.

思考题

若 $f(x)$在x_0连续，则$|f(x)|$、$f^2(x)$在x_0是否连续？
又若$|f(x)|$、$f^2(x)$在x_0连续，$f(x)$ 在x_0是否连续？

例7.求 $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{-\sin x}$ 的定义域,有连续区间吗?

解: $\because \begin{cases} \sin x \geq 0 \\ -\sin x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \sin x = 0,$

$\Rightarrow x = k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 为所求函数的定义域.

故没有连续区间.

例8.求 $y=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x<0\\ x^2-1, & x\geq 0\end{cases}$ 连续区间.

解： $f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$,

当$x<0$时, $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$为初等函数,连续;

当$x>0$时, $f(x)=x^2-1$为初等函数,连续;

而$f(0)=-1$, $f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{x}=1$,

$f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2-1)=-1$,

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在,即$x=0$为间断点.

$\therefore$ 连续区间为 $(-\infty,0)$和$[0,+\infty)$.

Back

例9.当a取何值时,函数

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & x<0,\\ a+x, & x\geq 0,\end{cases}$$ 在 $x=0$处连续.

解: $\because f(0)=a,$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\cos x=1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(a+x)=a,$$

要使 $f(0-0)=f(0+0)=f(0), \Rightarrow a=1,$

故当且仅当$a=1$时，函数$f(x)$在$x=0$处连续.

Back

例10.计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}\quad(a>0, a\neq 1)$.

解: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}$

$=\log_a[\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}]=\log_a e=\dfrac{1}{\ln a}$.

例11.计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+e)-1}{x}$.

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\frac{x}{e})}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+\frac{x}{e})^{\frac{e}{x}\cdot\frac{1}{e}}$

$=\dfrac{1}{e}\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+\frac{x}{e})^{\frac{e}{x}}=\dfrac{1}{e}\ln[\lim\limits_{x\to 0}(1+\frac{x}{e})^{\frac{e}{x}}]=\dfrac{1}{e}\ln e=\dfrac{1}{e}$.

例12.计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^a-1}{x}$.

解: 令 $(1+x)^a-1=u$, $(1+x)^a=1+u$,

则 $a\ln(1+x)=\ln(1+u)$,

且 $x\to 0$时, $u\to 0$.

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{u}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{u}{x}\cdot\frac{a\ln(1+x)}{\ln(1+u)}$$

$$=\lim_{x\to 0}a\cdot\frac{u}{\ln(1+u)}\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}=a.$$

Back

思考题

若 $f(x)$ 在 x_0 连续，则 $|f(x)|$、$f^2(x)$ 在 x_0 是否连续？又若 $|f(x)|$、$f^2(x)$ 在 x_0 连续，$f(x)$ 在 x_0 是否连续？

解：$\because f(x)$ 在 x_0 连续，$\therefore \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

且 $0\le \big||f(x)|-|f(x_0)|\big| \le |f(x)-f(x_0)|$

$\therefore \lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |f(x_0)|$

$\lim\limits_{x\to x_0} f^2(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f^2(x_0)$

故 $|f(x)|$、$f^2(x)$ 在 x_0 都连续.

但反之不成立. 如 $f(x)=\begin{cases}-1, & x\ge 0\\ 1, & x<0\end{cases}$ 在 $x_0=0$ 不连续

但 $|f(x)|$、$f^2(x)$ 在 $x_0=0$ 连续

Back

四、闭区间上连续函数的性质

定义2 对于在区间I上有定义的函数$f(x)$，如果有$x_0 \in I$，使得对于任一$x \in I$都有

$$f(x) \le f(x_0) \qquad (f(x) \ge f(x_0))$$

则称$f(x_0)$是函数$f(x)$在区间I上的最大(小)值.

并不是每一个函数都有最值.

$y = \sin x$在闭区间$[0,2\pi]$上有最大值1，最小值-1.

而$y = x$在开区间$(0,1)$内没有最值.

定理6（最大值和最小值定理）

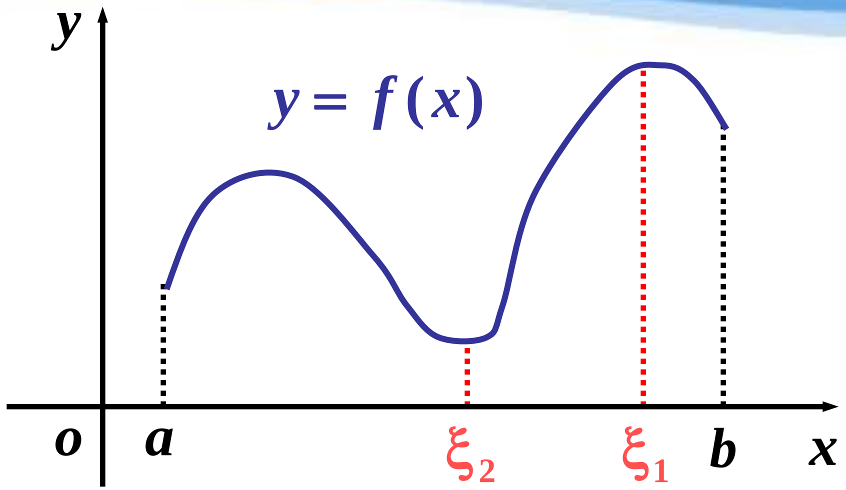
在闭区间上连续的函数一定能取得它的最大值和最小值.

即，如果函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则至少存在两点$\xi,\eta \in [a,b]$，

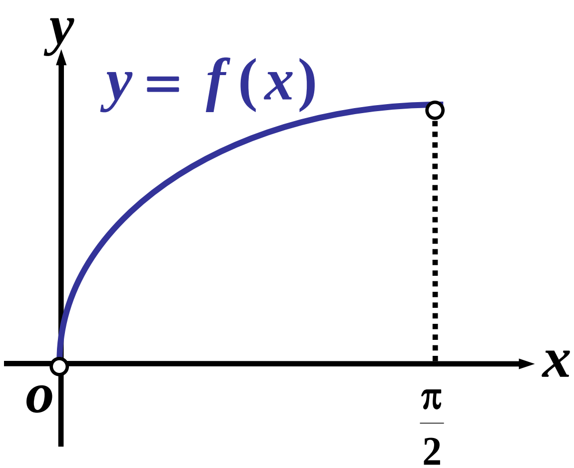
使得 $$f(\xi) = \max_{x\in[a,b]}\{f(x)\},\ f(\eta) = \min_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$$

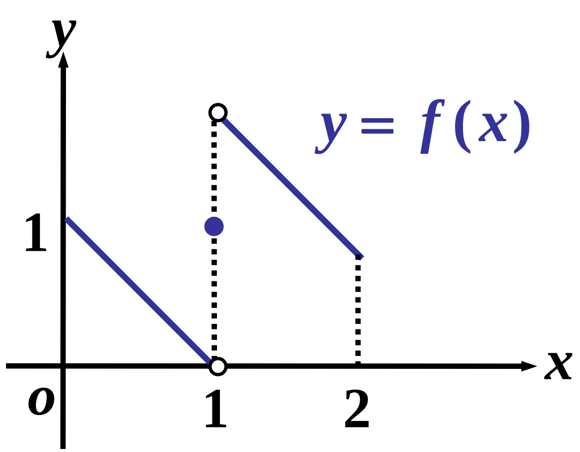
此定理的证明要用实数理论，从略.

图示说明如下



注意: 定理条件为充分条件, 条件缺一不可, 否则可能没有最值.





定理7(有界性定理)

在闭区间上连续的函数一定在该区间上有界.

证明：设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续,

$\forall x \in [a,b]$,　由连续函数最大最小值定理

有 $m \le f(x) \le M$,

取 $K = \max\{|m|, |M|\}$,

则有 $|f(x)| \le K$.

$\therefore$ 函数$f(x)$在$[a,b]$上有界.

例13. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在,

证明 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界.

证明: $\because \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A.$

取 $\varepsilon=1$, $\exists X>0$, 当 $x>X$ 时, 使得 $|f(x)-A|<\varepsilon=1.$

$$|f(x)|=|f(x)-A+A|\le|f(x)-A|+|A|<1+|A|.$$

又 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a,X]$ 上连续.

故 $f(x)$ 在 $[a,X]$ 上有最大值 M 与最小值 m .

取 $K=\max\{|M|,|m|,1+|A|\}$,

则对一切 $x\in[a,+\infty)$ 都有 $|f(x)|\le K.$

定义3 如果点 x_0 使 $f(x_0)=0$，那么称 x_0 为函数 $f(x)$ 的零点.

定理8(零点定理)

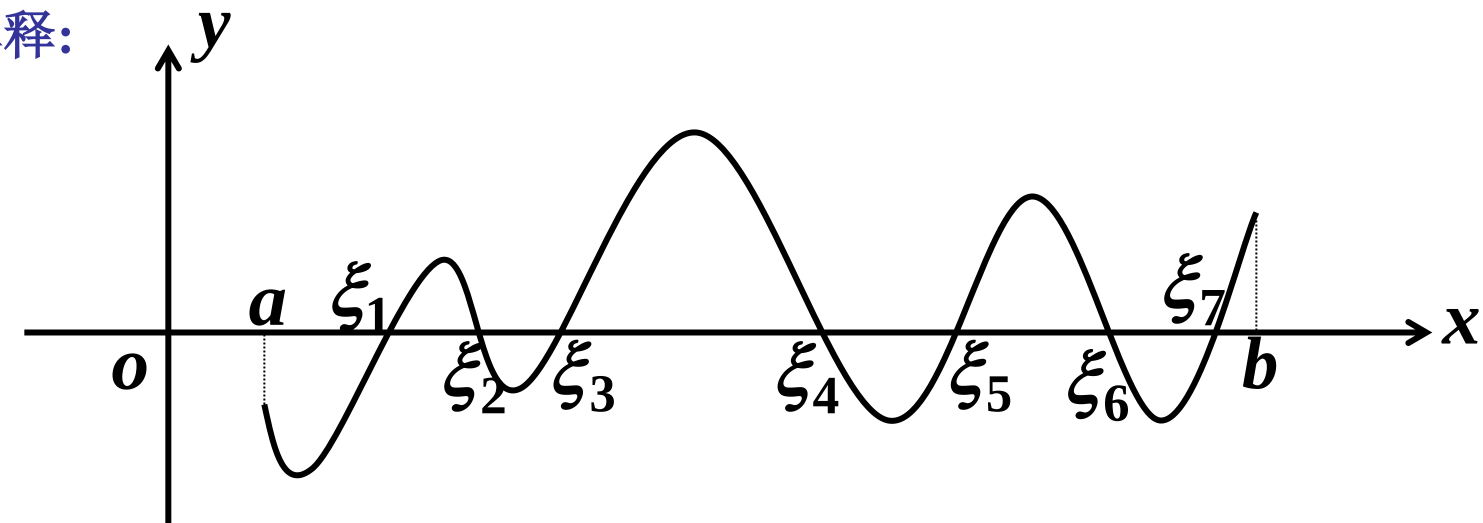
设 (1) $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,

(2) 且 $f(a)\cdot f(b)<0$,

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f(\xi)=0$.

即方程 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内至少存在一个实根.

几何解释:



此定理的证明要用实数理论, 从略.

定理9(介值定理)

设 (1) $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,

(2)且$f(a) \neq f(b)$,

(3)C为介于$f(a)$与$f(b)$之间的任意一个数,

则至少存在一点$\xi \in (a,b)$,使得$f(\xi) = C$.

证明: 设$\varphi(x) = f(x) - C$,

则$\varphi(x)$在闭区间$[a,b]$上连续.

$$\varphi(a) = f(a) - C, \quad \varphi(b) = f(b) - C,$$

$$\therefore \varphi(a) \cdot \varphi(b) < 0.$$

由零点定理得, 至少存在一点 $\xi \in (a,b)$,

使得 $\varphi(\xi) = 0$. 即 $f(\xi) = C$.

推论: 闭区间上的连续函数 $f(x)$ 必取得介于最大值 M 与最小值 m 之间的任何值.

证明: 设 $f(x_1)=m, f(x_2)=M,$

则 $f(x)$在闭区间$[x_1,x_2]$或$[x_2,x_1]$上连续,

由介值定理,

对任何实数 $C(m<C<M)$,

都有$\xi\in(x_1,x_2)$或(x_2,x_1),使得 $f(\xi)=C.$

例14.验证 $x\cdot 2^{x}=1$至少有一个小于1的正根.

例15.设 $f(x)$在闭区间$[0,1]$上连续,且$0<f(x)<1$,

证明:至少存在一点$\xi\in(0,1)$,使得$f(\xi)=\xi$.

例16. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,a]$上连续,

$f(0)=f(a)=0$,当$0<x<a$时$f(x)>0$,l为$(0,a)$上任一点,

证明至少存在一点$\xi\in(0,a)$ 使得 $f(\xi)=f(\xi+l)$.

例17.证明方程$x=a\sin x+b$(其中$a>0,b>0$)至少有一个正根,并且它不超过$a+b$.

例18. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$上连续, $a< x_1 < x_2 < \cdots x_n < b$,

则在$[x_1, x_n]$上必有ξ,使得

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

例19. 试证方程 $\dfrac{5}{x-1}+\dfrac{7}{x-2}+\dfrac{16}{x-3}=0$

有一根在(1,2)内,另一根在(2,3)内.

例20. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$上连续,

且$a<x_1<x_2<b$, t_1与t_2为两正数,证明

至少存在一点$C\in[a,b]$,

使得 $t_1 f(x_1)+t_2 f(x_2)=(t_1+t_2)f(C)$.

例14.验证 $x\cdot 2^x=1$至少有一个小于1的正根.

解: 设 $f(x)=x\cdot 2^x-1$,

则$f(x)$在闭区间[0,1]上连续.

又 $f(0)=-1<0$, $f(1)=1>0$,

即 $f(0)f(1)=-1<0$,

由零点定理, 至少存在一点$\xi\in(0,1)$, 使得 $f(\xi)=0$.

即 $\xi\cdot 2^{\xi}-1=0$,

即方程$x\cdot 2^x=1$至少有一个小于1的正根.

Back

例15.设 $f(x)$在闭区间$[0,1]$上连续,且$0<f(x)<1$,

证明:至少存在一点$\xi\in(0,1)$,使得$f(\xi)=\xi$.

证明: 设 $F(x)=f(x)-x$,

则 $F(x)$ 在闭区间 $[0,1]$上连续.

又 $F(0)=f(0)>0$, $F(1)=f(1)-1<0$.

由零点定理得,

至少存在一点$\xi\in(0,1)$, 使得 $F(\xi)=0$,

即 $f(\xi)=\xi$.

例16. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,a]$上连续,

$f(0)=f(a)=0$,当$0<x<a$时$f(x)>0$, l为$(0,a)$上任一点,

证明至少存在一点$\xi\in(0,a)$ 使得 $f(\xi)=f(\xi+l)$.

证明: 设$F(x)=f(x+l)-f(x)$,

则$F(x)$在闭区间$[0,a-l]$上连续,

又$F(0)=f(l)-f(0)=f(l)>0$,

$F(a-l)=f(a)-f(a-l)=-f(a-l)<0.$

$\therefore$至少存在一点$\xi\in(0,a-l)\subset(0,a)$,

使得 $F(\xi)=0$,

即 $f(\xi+l)=f(\xi)$.

Back

例17.证明方程 $x=a\sin x+b$(其中$a>0,b>0$)至少有一个正根,并且它不超过$a+b$.

证明: 设 $f(x)=x-a\sin x-b$,

则 $f(x)$ 在闭区间$[0,a+b]$上连续,

又 $f(0)=-b<0$,

$f(a+b)=a-a\sin(a+b)=a[1-\sin(a+b)]\geq 0.$

(1) 当 $f(a+b)=0$时,

即$\xi=a+b$是方程 $x=a\sin x+b$ 的根.

(2) 当 $f(a+b)>0$时,由零点定理得,

至少存在一点$\xi\in(0,a+b)$, 使得 $f(\xi)=0$,

即 $\xi=a\sin\xi+b.$

$\therefore x=a\sin x+b$ 在$(0,a+b]$上至少有一个根.

Back

例18. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$上连续, $a< x_1 < x_2 < \cdots x_n < b$,

则在$[x_1, x_n]$上必有ξ,使得

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

证明: $\because f(x)$ 在闭区间$[x_1, x_n]$上连续,

$\therefore \exists$最大值M与最小值m, 且$m \le f(x) \le M$.

从而, $m \le f(x_1) \le M$,

$$m \le f(x_2) \le M,$$

$$\cdots\cdots$$

$$m \le f(x_n) \le M,$$

从而, $m \le f(x_1) \le M,$

$$m \le f(x_2) \le M,$$

$$\cdots\cdots$$

$$m \le f(x_n) \le M,$$

$$\therefore nm \le f(x_1) + f(x_2) + \cdots f(x_n) \le nM.$$

即 $m \le \dfrac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots f(x_n)}{n} \le M.$

由介值定理得,

至少存在一点 $\xi \in (x_1, x_n) \subset [x_1, x_n]$, 使得

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

Back

例19. 试证方程 $\dfrac{5}{x-1}+\dfrac{7}{x-2}+\dfrac{16}{x-3}=0$

有一根在$(1,2)$内,另一根在$(2,3)$内.

证明:

设 $f(x)=5(x-2)(x-3)+7(x-1)(x-3)+16(x-1)(x-2)$

则 $f(x)$ 在闭区间$[1,2]$和$[2,3]$连续.

$$f(1)=10>0,$$

$$f(2)=-7<0,$$

$$f(3)=32>0.$$

$\therefore$ 至少存在一点$\xi_1\in(1,2)$, 使得 $f(\xi_1)=0$.

$\therefore$ 至少存在一点$\xi_2\in(2,3)$, 使得 $f(\xi_2)=0$.

所以结论成立.

Back

例20. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$上连续,

且 $a < x_1 < x_2 < b$, t_1与 t_2为两正数, 证明

至少存在一点$C \in [a,b]$,

使得 $t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) = (t_1 + t_2) f(C)$.

证明:

方法1. $\because f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续,

$\therefore \exists$最大值M和最小值m, 且$m \le f(x) \le M$.

从而, $m \le f(x_1) \le M$, $t_1 m \le t_1 f(x_1) \le t_1 M$,

$m \le f(x_2) \le M$, $t_2 m \le t_2 f(x_2) \le t_2 M$,

$\therefore (t_1 + t_2)m \le t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) \le (t_1 + t_2)M$,

即 $m \le \dfrac{t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2)}{t_1 + t_2} \le M.$

由介值定理可知，至少存在一点 $C \in [a,b]$，使得

$$t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) = (t_1 + t_2) f(C).$$

方法2.

设 $F(x) = t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) - (t_1 + t_2) f(x).$

则 $F(x)$ 在闭区间 $[x_1, x_2] \subset [a,b]$ 上连续，

$$F(x_1) = t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) - (t_1 + t_2) f(x_1)$$
$$= t_2 [f(x_2) - f(x_1)],$$

$$F(x_2)=t_1 f(x_1)+t_2 f(x_2)-(t_1+t_2)f(x_2)$$

$$=t_1[f(x_1)-f(x_2)],$$

$$\therefore F(x_1)\cdot F(x_2)=-t_1t_2[f(x_2)-f(x_1)]^2\le 0.$$

(1) 当$F(x_1)\cdot F(x_2)=0$时，则 $f(x_2)=f(x_1)$，$\therefore C=x_1$

(2) 当$F(x_1)\cdot F(x_2)<0$时，

至少存在一点$C\in(x_1,x_2)\subset[a,b]$，使得 $F(C)=0$.

即 $t_1 f(x_1)+t_2 f(x_2)=(t_1+t_2)f(C)$.

$\therefore$至少存在一点$C\in[x_1,x_2]\subset[a,b]$，使得

$$t_1 f(x_1)+t_2 f(x_2)=(t_1+t_2)f(C).$$

作业题

一．讨论下列函数在指定点的连续性，并将结论填入括号内：

$$f(x)=\begin{cases} x^2, 0\le x\le 1 \\ 2-x, 1<x\le 2 \end{cases}$$，在点 $x=1$ 处（ 连续）；

$g(x)=x|x|$ 在点 $x=0$ 处 （ 连续）；

$$h(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}, x\ne 0, \\ 0, x=0 \end{cases}$$ 在点 $x=0$ 处（ 跳跃间断 ）

4. $$I(x)=\begin{cases} e^x, x<0, \\ 2, x=0, \\ \dfrac{\sin x}{x}, x>0 \end{cases}$$ 在点 $x=0$ 处（ 可去间断 ）

二. 下列函数在指定点间断，说明这些点属于哪一类间断点，如果是可去间断点，则补充或改变函数的定义使它连续.

1. $x=1, x=2$ 分别是函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 的 可去、无穷 间断点，补充 $f(1)=-2$，则函数在此点连续.

2. $x=0$ 为函数 $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{3x}$ 的 可去 间断点，补充定义 $f(0)=\dfrac{2}{3}$，则函数在 $x=0$ 处连续.

3. $x=0$ 为 $f(x)=\cos^2\dfrac{1}{x}$ 的 第二类振荡型 间断点.

4. $x=0$ 为 $f(x)=\begin{cases}\arctan\dfrac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$ 的 第一类跳跃 间断点.

三．适当选取a，使函数$f(x)=\begin{cases} e^x, & x<0 \\ a+x & x\geq 0 \end{cases}$连续.

解． $\because f(0)=a=f(0-0)=e^0=1$， $\therefore$ 当$a=1$时， $f(x)$即为连续函数.

四．讨论函数$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}\ln(1+2x), x>0 \\ \dfrac{x+1}{x-1}, x\leq 0 \end{cases}$的连续性.

解． $f(x)$为分段函数，且在$(-\infty,0),(0,+\infty)$内均为初等函数，故连续；在分段点$x=0$处，有 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x+1}{x-1}=-1, \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+2x)}{x}=2$，故$f(x)$在$x=0$处间断，且为跳跃间断点．所以$f(x)$在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$连续.

五. 已知 $f(x)=\begin{cases}(1+3x)^{\frac{1}{x}}, x<0\\ a, x=0,\\ \dfrac{b\sin 3x}{x}, x>0\end{cases}$，问

1. 当 a,b 为何值，$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$存在；

2. 当 a,b 为何值，$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续.

解. 1. 因 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(1+3x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^-}(1+3x)^{\frac{1}{3x}\cdot 3}=e^3$，

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{b\sin 3x}{x}=b\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot 3=3b$， 故当 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ 时， 即

$e^3=3b$， $b=\dfrac{e^3}{3}$时， $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$存在；

2. $f(x)$为分段函数，且在$(-\infty,0),(0,+\infty)$内均为初等函数，故连续；在分段点

$x=0$ 处， 当 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)=a$ ， 即 $e^3=3b$ ， $a=e^3$ 时，

$f(x)$在$x=0$处连续，从而$a=e^3$， $b=\dfrac{e^3}{3}$时， $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续.

六. 求下列函数的极限:

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1+x}};$$

解. $$\lim_{x\to1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1+x}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{0}{2}}=1.$$

$$\lim_{x\to+\infty}(\arctan x)^{\cos\frac{1}{x}};$$

解. $$\lim_{x\to+\infty}(\arctan x)^{\cos\frac{1}{x}}=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1}=\frac{\pi}{2}.$$

$$\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$$

解. $$\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}\left[(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}}\right]^{\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}}\cdot\frac{1}{4}}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+ax)}{x}$

解. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+ax)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \ln(1+ax)^{\frac{1}{x}} = \ln \lim\limits_{x \to 0} (1+ax)^{\frac{1}{x}}$

$= \ln \lim\limits_{x \to 0} (1+ax)^{\frac{1}{ax} \cdot a} = \ln e^{a} = a$

作业题7 证明方程 $x = a\sin x + b$，其中 $a>0, b>0$，至少有一个正根，并且它不超过 $a+b$.

证 令 $f(x) = x-(a\sin x+b), x\in[0,a+b]$

则 $f(x)$在$[0,a+b]$上连续，且

$$f(0) = -b<0, \quad f(a+b) = a[1-\sin(a+b)]$$

1°若$\sin(a+b)=1$, 则 $f(a+b)=0$

$$x = a+b\text{为所给方程的根.}$$

2°若$\sin(a+b)<1$, 则 $f(a+b)>0$,

$$f(0)f(a+b)<0$$

由零点定理，知 $\exists\,\xi\in(0, a+b)$, 使 $f(\xi)=0$.

返 回

作业题 8. 设函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续，且$f(a)<a$，$f(b)>b$. 证明$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=\xi$.

证 令 $F(x)=f(x)-x$，则$F(x)$在$[a,b]$上连续,

而 $F(a)=f(a)-a<0$,

$F(b)=f(b)-b>0$, 由零点定理,

$\exists\xi\in(a,b)$，使 $F(\xi)=f(\xi)-\xi=0$,

即 $f(\xi)=\xi$.

五、函数的一致连续性

1.函数一致连续的定义

定义4 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果对于任意给定的正数 ε，存在仅与 ε 有关的正数 $\delta=\delta(\varepsilon)$，使得对于区间 I 上的任意两点 x_1, x_2，当 $|x_1-x_2|<\delta(\varepsilon)$ 时，有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

那么称函数 $f(x)$ 在区间 I 是**一致连续**的.

一致连续性表明: 不论在区间I的任何部分, 只要自变量的两个数值接近到一定程度就可使对应的函数值达到所指定的接近程度.

由上述定义知, 如果函数 $f(x)$ 在区间上是一致连续的, 那么 $f(x)$ 在区间上一定是连续的. 但反过来不一定成立, 即在区间上连续的函数不一定在区间上是一致连续的.

例 1.7.24 证函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,1]$ 上是连续的，但不是一致连续的.

证明： 因为函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 是初等函数，它在区间 $(0,1]$ 上有定义，所以在 $(0,1]$ 上是连续的.

$\forall\varepsilon>0\,(0<\varepsilon<1)$，假设 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1]$ 上一致连续，应该 $\exists\delta>0$，使得对于 $(0,1]$ 上的任意两个值 x_1, x_2，当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，就有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

现在取原点附近的两点 $x_1=\frac{1}{n}, x_2=\frac{1}{n+1}$，$n\in\mathbf{N}^+$，显然 $x_1, x_2\in(0,1]$.

因 $|x_1-x_2|=\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right|=\frac{1}{n(n+1)}$，故只要 n 取得足够大，总能使 $|x_1-x_2|<\delta$

但这时有 $$|f(x_1)-f(x_2)|=\left|\frac{1}{\frac{1}{n}}-\frac{1}{\frac{1}{n+1}}\right|=|n-(n+1)|=1>\varepsilon$$

不符合一致连续的定义，所以 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1]$ 上不是一致连续的.

例 1.7.25 证明函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是一致连续的.

证明: 由于 $\forall x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$, 有

$$|\sin x_1-\sin x_2|=\left|2\cos\frac{x_1+x_2}{2}\sin\frac{x_1-x_2}{2}\right|\le 2\left|\sin\frac{x_1-x_2}{2}\right|\le|x_1-x_2|,$$

所以对于任给 $\varepsilon>0$, 只要取 $\delta=\varepsilon$, 当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时, 就有

$$|\sin x_1-\sin x_2|<\varepsilon.$$

因此 $\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是一致连续的. 类似可证 $\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

例1.7.24说明, 在半开区间上连续的函数不一定在该区间内一致连续, 但是, 关于闭区间上连续的函数, 有下面结论.

定理10 (闭区间上连续的函数是一致连续函数)

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 那么, 它在 $[a,b]$ 上一定是一致连续的.

此定理的证明要用实数理论, 从略.

六、压缩映射原理与迭代法

1.压缩映射的定义

作为极限理论与函数连续性的一个重要应用，下面简单介绍在近代数学中用于判定方程根的存在唯一性的一个重要原理，即压缩映射原理以及用来求解方程近似根的迭代法.

设 f 是从集合 A 到自身的一个映射. 若存在一个 $x_0 \in A$，使 $f(x_0)=x_0$，则称 x_0 是映射 f 的一个**不动点**.

定义5 如果映射 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 满足不等式 $|f(x)-f(y)|\le k|x-y|$

其中 $x,y\in\mathbf{R}, 0<k<1$，那么称 f 为 $\mathbf{R}$ 上的压缩映射.

容易证明: 定义在 $\mathbf{R}$ 上的压缩映射(函数)是连续的.

定理11 (压缩映射原理)

设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是一个压缩映射，则 f 在 $\mathbf{R}$ 上有唯一的不动点.

证明:

（1）**首先证明:** 任取 $x_0\in\mathbf{R}$，利用压缩映射 f 作迭代生成的数列 $\{x_n\}$:

$$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \cdots, x_n = f(x_{n-1}), \cdots$$

是收敛数列. 事实上, 因为

$$|x_n - x_{n-1}| = |f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})| \le k|x_{n-1} - x_{n-2}| = k|f(x_{n-2}) - f(x_{n-3})| \le k^2|x_{n-2} - x_{n-3}|$$

$$\le \cdots \le k^{n-1}|x_1 - x_0|$$

所以, 对于任何 $p \in \mathbf{N}^+$, 有

$$|x_{n+p} - x_n| \le |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n|$$

$$\le \left(k^{n+p-1} + k^{n+p-2} + \cdots + k^n\right)|x_1 - x_0|$$

$$= \frac{k^n(1-k^p)}{1-k}|x_1 - x_0| < \frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|$$

由于 $k<1$, 故 $\forall \varepsilon > 0$, 要使 $|x_{n+p} - x_n| < \dfrac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0| < \varepsilon$, 即 $n > \dfrac{\ln\left(\dfrac{1-k}{|x_1 - x_0|}\varepsilon\right)}{\ln k}$.

取 $N=\left[\dfrac{\ln\left(\dfrac{1-k}{|x_1-x_0|}\varepsilon\right)}{\ln k}\right]$，当 $n>N$ 时，有 $|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$.

根据 Cauchy 收敛准则，数列 $\{x_n\}$ 是收敛的. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

（2）其次证明： a 是映射 f 的一个不动点.

事实上， 对迭代关系 $x_n=f(x_{n-1})$ 两边取极限，且由 f 的连续性得

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}f(x_{n-1})=f\left(\lim_{n\to\infty}x_{n-1}\right)$$

即 $a=f(a)$. 因此 a 是 f 的一个不动点.

（3）最后证明： f 的不动点是唯一的.

事实上， 如果 f 有另一个不动点 b，即 $b=f(b)$，那么

$$|b-a|=|f(b)-f(a)|\le k|b-a|$$

因 $0<k<1$，所以 $a=b$.

综上所述，f 有唯一的不动点.

由于定理证明中所作的迭代数列$\{x_n\}$收敛于方程$f(x)=x$的精确解, 因此, 迭代数列中的任何一项x_n都可以作为它的近似解, 而且越n大精度越高.

在不等式$|x_{n+p}-x_n|<\frac{k^n}{1-k}|x_1-x_0|<\varepsilon$中, 令$p\to\infty$,得

$$|a-x_n|\le\frac{k^n}{1-k}|x_1-x_0|=\frac{k^n}{1-k}|f(x_0)-x_0|$$

这就是经过n次迭代后得到的近似解x_n与精确解a的误差估计式.

这种方法是方程求解中一种常用而且简便易行的近似解法, 称为迭代法.