________学院 ________班级 姓名________ 学号________

第 2 章 一元函数微分学

2.1.1 引例 2.1.2 导数概念 2.1.3 导数的几何意义

2.1.4 可导与连续的关系 2.1.5 求导数的例题·导数基本公式

答案：

一、填空题

1. 设 $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x\cdot\sqrt[3]{x}}}$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\underline{-\dfrac{4}{9}x^{-\frac{13}{9}}}$.

2. 设 $f(x)=x^2$，则 $f[f'(x)]=\underline{4x^2}$， $f'[f(x)]=\underline{2x^2}$.

3. 以初速 v_0 上抛的物体，其上升高度 s 与时间 t 的关系是 $s=v_0t-\dfrac{1}{2}gt^2$，该物体的速度

$v(t)=\underline{v_0-gt}$,该物体达到最高点的时刻 $t=\underline{\dfrac{v_0}{g}}$.

二． 选择题

1. 下列命题正确的是（ D ）

(A) 初等函数在其定义区间内可导； (B) $f'(a)=(f(a))'$，其中 a 为常数；

(C) 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处有切线，则 $f'(x_0)$ 存在；

(D) 可导的偶函数的导数是奇函数.

2. 设 $f(x)=x|x|$ 则 $f'(0)=$(A)

(A) 0； (B) 1；

(C) -1； (D) 不存在.

解：应先去掉 $f(x)$ 的绝对值， $f(x)$ 改写为 $f(x)=x|x|=\begin{cases} x^2 & x\ge 0, \\ -x^2 & x<0. \end{cases}$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-0}{x-0}=0$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x^2-0}{x-0}=0$$

所以 $f'(0)=0$

3. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 可导，a,b 为常数，则

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + a\Delta x) - f(x_0 + b\Delta x)}{\Delta x} = $$（C ）

(A) $abf'(x_0)$； (B) $(a+b)f'(x_0)$；

(C) $(a-b)f'(x_0)$； (D) $\frac{a}{b}f'(x_0)$.

解：$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + a\Delta x) - f(x_0 + b\Delta x)}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x_0 + a\Delta x) - f(x_0)] - [f(x_0 + b\Delta x) - f(x_0)]}{\Delta x}$$

$$= a\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + a\Delta x) - f(x_0) - f(x_0)}{a\Delta x} - b\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + b\Delta x) - f(x_0)}{b\Delta x}$$

$$= (a-b)f'(x_0)$$

三．解：因 $f(x)$ 为分段函数，故它在分段点的导数应按导数的定义。

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1 - e^{-x^2}}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - e^{-x^2}}{x^2} = 1$$

四．解：要使 $f(x)$ 处处可导，只要 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导，$f(x)$ 可导的必要条件是 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，因为

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (e^x + b) = 1 + b,$$

$$\lim_{x \to 0^+} \boldsymbol{f(x)} = \lim_{x \to 0^+} \sin \boldsymbol{ax} = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{f(0) = 1 + b},$$

要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，必须 $1+b=0$, 即 $b=-1$, 又

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^x + b - (1+b)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin ax - (1+b)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin ax}{x} = a$$

要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导，必须 $f'_-(0) = f'_+(0)$，即 $a=1$，当 $\boldsymbol{a = 1.b = -1}$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导。

$$f'(x)=\begin{cases} e^x & x<0 \\ 1 & x=0 \\ \cos x & x>0 \end{cases}$$

五．解 由条件推出 $f(0)=0, f'(0)=1$，于是

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2}}\sqrt{f(\frac{2}{n})}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f\left(\frac{2}{n}\right)-f(0)}{\frac{1}{n}}\right]^{\frac{1}{2}}=\lim_{n\to\infty}\left[2\cdot\frac{f\left(\frac{2}{n}\right)-f(0)}{\frac{2}{n}}\right]^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2f'(0)}=\sqrt{2}$$

2.1.6 函数的和、积、商的导数 2.1.7 反函数的导数 2.1.8 复合函数的导数

答案：一、填空题

1．已知 $f'(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$，则 $\dfrac{\mathrm{d}f\left(\sqrt{1-x^2}\right)}{\mathrm{d}x}=\underline{-\dfrac{2x}{|x|}}$；

2．设 $y=e^x+\ln x$，则 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\underline{\dfrac{x}{xe^x+1}}$ ；

3. $y=2^{|\sin x|}$,则 $y'=\underline{\ln 2\cdot\sin 2x\cdot 2^{\sqrt{\sin^2 x}}\dfrac{1}{2|\sin x|}}$；

二、选择题.

1 已知 $F(x)=f(g(x))$ 在 x_0 处可导则（ B ）

(A) $f(x),g(x)$ 都必须可导　　(B) $f(x),g(x)$ 不一定都可导

(C) $g(x)$ 一定可导　　(D) $f(x)$ 必须可导

2．设 $f(x)=\varphi(a+bx)-\varphi(a-bx)$，其中 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，且在 $x=a$ 处可导，则 $f'(0)=$（ C ）

(A) $2a$；　(B) $2b$；　(C) $2b\varphi'(a)$；　(D) $2\varphi'(a)$

3．要使函数 $f(x)=\begin{cases} x^n\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ （其中 n 为自然数） 在 $x=0$ 处的导函数连续，则 n 应取何值？(D)

(A) $n=0$；　(B) $n=1$；

(C) $n=2$；　(D) $n\geq 3$.

解：当 $n>1$ 时，$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x^{n-1}\sin\dfrac{1}{x}=0$

$$f'(x)=\begin{cases} nx^{n-1}\sin\dfrac{1}{x}-x^{n-2}\cos\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$ 由 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=0$ 知 $n\geq 3$

三、计算下列各函数的导数

1． $y=\arcsin\sqrt{\ln\cos x}$，求 y'。

解：首先分析复合成分 $y=\arcsin u, u=\sqrt{v}, v=\ln w, w=\cos x$ 由链式法则得

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dw}\cdot\frac{dw}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{v}}\cdot\frac{1}{w}\cdot(-\sin x)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-\ln\cos x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\ln\cos x}}\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)=-\frac{tgx}{2\sqrt{\ln\cos x(1-\ln\cos x)}}.$$

2. $y=\dfrac{1}{2}\arctan\sqrt{1+x^2}+\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}-1}$

解. 引入 $u(x)=\sqrt{1+x^2}$，得 $y=\dfrac{1}{2}\arctan u+\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{u+1}{u-1}$，于是 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，又

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}=\frac{1}{2\left(1+u^2\right)}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u-1}\right)=\frac{1}{1-u^4}=\frac{1}{1-\left(\sqrt{1+x^2}\right)^4}=\frac{-1}{2x^2+x^4}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \text{ 则 } \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\left(\frac{-1}{2x^2+x^4}\right)\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{-1}{x\left(2+x^2\right)\sqrt{1+x^2}}.$$

3. $y=(\arccos x)^2\left(\ln^2\arccos x-\ln\arccos x+\dfrac{1}{2}\right),(|x|<1)$

解：设 $u=\arccos x$，则 $y=u^2\left(\ln^2 u-\ln u+\dfrac{1}{2}\right)$，则 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$

$$\frac{dy}{du}=2u\left(\ln^2 u-\ln u+\frac{1}{2}\right)+u^2\left(\frac{2\ln u}{u}-\frac{1}{u}\right)=2u\ln^2 u$$

$$\frac{du}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\therefore\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=2u\ln^2 u\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)=-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\arccos x\cdot\ln^2\arccos x.$$

四．设 $f(x)$、$g(x)$ 可导，且 $f^2(x)+g^2(x)\neq 0$，求函数 $y=\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}$ 的导数.

解： $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}}[f^2(x)+g^2(x)]'$

$$=\frac{1}{2\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}}[2f(x)\cdot f'(x)+2g(x)g'(x)]$$

$$=\frac{f(x)\cdot f'(x)+g(x)g'(x)}{\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}}.$$

五. 设 $f'(x)=\cos x^2, y=f\left(\dfrac{2x-1}{x+1}\right)$ 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

$$\frac{dy}{dx}=f'\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)\cdot\frac{2(x+1)-(2x-1)}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^3}\cos\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)^2$$

2.1.9 高阶导数 2.1.10 隐函数的求导法则

答案：一、填空题

一、填空题

1．设 $y=x(x-1)(x-2)\cdot\cdots\cdot(x-2008)$，则 $y^{(2009)}$ =_______2009！_____________.

2. 设 $f(x)=\ln(3+7x-6x^2)$, 则 $f^{(n)}(1)=$__________；

解： $f(x)=\ln(3+7x-6x^2)=\ln(3-2x)(1+3x)=\ln(3-2x)+\ln(1+3x)$,

$f'(x)=-2\dfrac{1}{3-2x}+3\cdot\dfrac{1}{1+3x}$, 于是

$$f^{(n)}(x)=\left(\frac{-2}{3-2x}+\frac{3}{1+3x}\right)^{(n-1)}=\frac{-2^n\cdot(n-1)!}{(3-2x)^n}+\frac{(-1)^{n+1}\cdot 3^n\cdot(n-1)!}{(1+3x)^n},$$

$$\therefore\ f^{(n)}(1)=-2^n\cdot(n-1)!+(-1)^{n+1}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n(n-1)!.$$

3. 设 $y=x^2\cos 2x$，求 $y^{(50)}$=__________.

解：因 x^2 的三阶导数为零，用莱布尼茨公式，有

$$y^{(50)}=(\cos 2x\cdot x^2)^{(50)}=(\cos 2x)^{(50)}x^2+50(\cos 2x)^{(49)}(x^2)'+\frac{50\cdot 49}{2!}(\cos 2x)^{(48)}\cdot(x^2)''$$

由于 $(\cos 2x)^{(n)}=2^n(\cos 2x+\dfrac{n}{2}\boldsymbol{\pi})$,故

$$y^{(50)}=(\cos 2x\cdot x^2)^{(50)}=2^{50}(\cos 2x+\frac{\boldsymbol{\pi}}{2}\cdot 50)x^2+50\cdot 2^{49}\cos(2x+\frac{\boldsymbol{\pi}}{2}\cdot 49)2x$$

$$+\frac{50\cdot 49}{2!}2^{48}\cos(2x+\frac{\boldsymbol{\pi}}{2}\cdot 48)\cdot 2$$

$$y^{(50)}=2^{50}(-x^2\cos 2x-50x\sin 2x+\frac{1225}{2}\cos 2x)$$

二、选择题：

1.设函数 $f(x)=3x^3+x^2|x|$, 则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶导数 $\boldsymbol{n}=$（ C ）

(A) 0； (B) 1；

(C) 2； (D) 3

解：应先去掉 $f(x)$ 的绝对值， $f(x)$ 改写为 $f(x)=3x^3+x^2|x|=\begin{cases}2x^3 & x<0\\ 4x^3 & x\geq 0\end{cases}$

可求 $f'(x)=\begin{cases}6x^2 & x<0\\ 0 & x=0\\ 12x^2 & x>0\end{cases}$ ， $f''(x)=\begin{cases}12x & x<0\\ 0 & x=0\\ 24x & x>0\end{cases}$

$$f_-'''(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f''(x)-f''(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{12x-0}{x-0}=12$$

$$f_+'''(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f''(x)-f''(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{24x-0}{x-0}=24$$

所以 $f_-'''(0)\neq f_+'''(0)$，则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶导数 $n=2$

2．$\arcsin x\ln y-e^{2x}+\tan y=0$，则 $\left.\dfrac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}}\right|_{\substack{x=0\\ y=\frac{\pi}{4}}}$ =（ A ）

(A) $1-\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\pi}{4}$；　(B) $2-\ln\dfrac{\pi}{4}$；

(C) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\pi}{4}-1$；　(D) $\dfrac{1}{2}$

3．已知 $f'(x)=ae^{2x}(a>0)$，则 $f(x)$ 的反函数的二阶导数 $\dfrac{d^2x}{dy^2}$ =（D ）.

(A) $\dfrac{1}{2ae^{2x}}$；　(B) $\dfrac{2}{ae^{2x}}$；

(C) $\dfrac{ae^{2x}}{2}$；　(D) $-\dfrac{2}{a^2e^{4x}}$

解：$\dfrac{d^2x}{dy^2}=-\dfrac{f''(x)}{(f'(x))^3}=-\dfrac{2ae^{2x}}{a^3e^{6x}}=-\dfrac{2}{a^2e^{4x}}$

三、. 设 $y=\dfrac{x^2}{x^2-3x-4}$，求 $y^{(n)}$.

解：首先将 $y=\dfrac{x^2}{x^2-3x-4}$ 分解成最简分式。

$$y=\frac{x^2}{x^2-3x-4}=1+\frac{16}{5(x-4)}-\frac{1}{5(x+1)}$$

$$\therefore y^{(n)}=(-1)^n\frac{n!}{5}\left[\frac{16}{(x-4)^{n+1}}-\frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right]$$

四、求由方程 $y=1+xe^y$ 所确定的隐函数 y 的二阶导数。

解：将方程 $y=1+xe^y$ 的两边对 x 连续两次求导：

$$y' = e^{y} + xe^{y} \cdot y'$$

$$y'' = e^{y} \cdot y' + e^{y} \cdot y' + xe^{y} \cdot y' + xe^{y} \cdot y''$$

故 $y'' = \dfrac{2e^{y} \cdot y' + xe^{y} \cdot (y')^{2}}{1 - xe^{y}} = \dfrac{2e^{y} \cdot \dfrac{e^{y}}{1 - xe^{y}} + xe^{y} \cdot (\dfrac{e^{y}}{1 - xe^{y}})^{2}}{1 - xe^{y}} = \dfrac{e^{2y}(3 - y)}{(2 - y)^{2}}$

五、函数 $f(x)$ 二阶可导，选择常数 a,b,c 使函数

$F(x) = \begin{cases} f(x) & x \le x_0 \\ a(x - x_0)^2 + b(x - x_0) + c & x > x_0 \end{cases}$ 二阶可导。

解：首先 $F(x)$ 应连续，故有 $\lim\limits_{x \to x_0^-} F(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} F(x) = F(x_0)$ 即，

$f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} [a(x - x_0)^2 + b(x - x_0) + c] = c.$ 由 $F'(x_0 - 0) = F'(x_0 + 0)$ 得

$F'(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f'(x) = f'(x_0 - 0) = f'(x_0) == \lim\limits_{x \to x_0^+} [2a(x - x_0) + b] = b$ 再由

$F''(x_0 - 0) = F''(x_0 + 0)$

得 $F''(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f''(x) = f''(x_0 - 0) = f''(x_0) == \lim\limits_{x \to x_0^+} 2a = 2a \Rightarrow a = \dfrac{f''(x_0)}{2}$

2.1.11 对数求导法　　2.1.12 参数方程所确定的函数的导数

．答案：一、填空题

一、填空题

1．　$y=\sqrt{x\sin x\sqrt{1-x^2}}$ ，则 $y'=\underline{\sqrt{x\sin x\sqrt{1-x^2}}\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{2}\cot x-\frac{x}{2(1-x^2)}\right)}$.

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{2x}+\frac{1}{2}\cot x-\frac{x}{2(1-x^2)},\therefore y'=\sqrt{x\sin x\sqrt{1-x^2}}\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{2}\cot x-\frac{x}{2(1-x^2)}\right)$$

2.设 $\begin{cases} x=2t+|t| \\ y=5t^2+4t|t| \end{cases}$，则 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\underline{0}$.

解：当 $t=0$ 时，$|t|$ 不可导，从而 $\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}$ 在 $t=0$ 处不存在，所以不能用参数方程的求导公式求

$t=0$ 的 $\frac{dy}{dx}$，只能用定义求 $\frac{dy}{dx}$。消参数得 $y=\begin{cases} x^2, & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$，所以

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x==0}=\lim_{x\to 0}\frac{y(x)-y(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=0=$$

3．已知 $\begin{cases} x=f'(t) \\ y=tf'(t)-f(t) \end{cases}$，其中 $f''(t)\neq 0$ 可导，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\underline{\frac{1}{f''(t)}}$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{f'(t)+tf''(t)-f'(t)}{f''(t)}=t$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}\Bigg/\frac{dx}{dt}=\frac{1}{f''(t)}$$

3. 设 $\begin{cases} x=\dfrac{3at}{1+t^2} \\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^2} \end{cases}$ 在 $t=2$ 处的切线方程为（　A　）.

(A)　$4x+3y-12a=0$；　　　　(B)　$3x-4y+6a=0$；

(C)　$4x-3y-12a=0$；　　　　(D)　$3x+4y-12a=0$

解：$t=2$ 对应的点为 $(\frac{6}{5}a,\frac{12}{5}a)$. 并且该点切线斜率为 $k=\left.\frac{y_t'}{x_t'}\right|_{t=2}=\left.\frac{2t}{1-t^2}\right|_{t=2}=-\frac{4}{3}$

故 $t=2$ 处对应点 $(\frac{6}{5}a,\frac{12}{5}a)$ 处的切线方程为

$$y-\frac{12}{5}a=-\frac{4}{3}(x-\frac{6}{5}a)$$

即 $4x+3y-12a=0$.

二． 选择题

1．已知 $\begin{cases} x=f(t)-\pi \\ y=f(e^{3t}-1) \end{cases}$，其中 f 可导， $f'(0)\neq 0$，则 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}=$ （ D ）

(A) 0； (B) 1；

(C) $f'(0)$； (D) 3

解：$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}=\left.\frac{y_t'}{x_t'}\right|_{t=0}=\left.\frac{f'(e^{3t}-1)\cdot 3e^t}{f'(t)}\right|_{t=0}=3$

2．$\sqrt[y]{x}=\sqrt[x]{y}$ ， 则 $y''|_{\substack{x=1\\y=1}}=$ （ A ）.

(A) 0； (B) 1；

(C) 2； (D) 不存在

解 $\frac{1}{y}\ln x=\frac{1}{x}\ln y$，即 $x\ln x=y\ln y$

$\because \ln x+1=y'\ln y+y'$，得 $y'=\frac{1+\ln x}{1+\ln y}$，则得

$$y''=\frac{\frac{1}{x}(1+\ln y)-(1+\ln x)\frac{1}{y}\cdot y'}{(1+\ln y)^2}=\frac{y(1+\ln y)^2-x(1+\ln x)^2}{xy(1+\ln y)^3}$$

$\therefore y''|_{\substack{x=1\\y=1}}=0$

三、$\begin{cases} x=\ln\cos t, \\ y=\sin t-t\cos t, \end{cases}$ 求 $\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$.

解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\Big/\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{\cos t-(\cos t-t\sin t)}{-\dfrac{\sin t}{\cos t}}=-t\cos t.$ ，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{-\cos t+t\sin t}{-\dfrac{\sin t}{\cos t}}=\cos t(\cot t-t).$$

四、对数螺线$\rho=e^{\theta}$在点$(\rho,\theta)=(e^{\frac{\pi}{2}},\frac{\pi}{2})$处的切线的直角坐标方程。

解：将曲线的极坐标方程转换为参数方程

$\begin{cases}x=\rho(\theta)\cos\theta=e^{\theta}\cos\theta\\ y=\rho(\theta)\sin\theta=e^{\theta}\sin\theta\end{cases}$ 其中θ为参数。

则曲线在点$\theta=\dfrac{\pi}{2}$的切线斜率为

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\left.\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=-1$$

切点为$x\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0,y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}$故切线方程为$y-e^{\frac{\pi}{2}}=-(x-0)$即$x+y=e^{\frac{\pi}{2}}$。

五、 设$y=y(x)$是由方程组$\begin{cases}x=3t^2+2t+3\\ e^y\cdot\sin t-y+1=0\end{cases}$所确定的隐函数，求$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}$.

解：从$e^y\cdot\sin t-y+1=0$中，可得

$y_t'=\dfrac{e^y\cos t}{1-e^y\sin t}=\dfrac{e^y\cos t}{2-y}$ 于是$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y_t'}{x_t'}=\dfrac{e^y\cos t}{2(3t+1)(2-y)}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{\left[\dfrac{e^y\cos t}{2(3t+1)(2-y)}\right]_t'}{2(3t+1)}$$
$$=\frac{1}{4(3t+1)^3(2-y)^2}\left\{(3t+1)(2-y)(\cos t\cdot e^y\cdot y_t'-e^y\sin t)-e^y\cos t[3(2-y)+(3t+1)(-y_t')]\right\}$$

因为$y|_{t=0}=1,y'|_{t=0}=1$，于是$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=\dfrac{e(2e-3)}{4}$.

2.1.13 微分概念 2.1.14 微分的求法•微分形式不变性

答案：一、填空题

1. 已知 $xy = e^{x+y}$，则 $dy = \underline{\dfrac{y - e^{x+y}}{e^{x+y} - x}} dx$；

2. $d\left(\dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + c\right) = \dfrac{1}{x^2 + a^2} dx \quad (a \in R, 且 a \neq 0)$.

3. $y = (1 + \sin x)^x$，则 $dy\big|_{x=\pi} = \underline{-\pi dx}$.

二、选择题。

1. 函数 $y = f(x)$ 在某点 x 处有增量 $\Delta x = 0.2$,对应的函数增量的主部等于 0.8，则

$f'(x) =$ (C)

A) 0.4； (B) 0.16；

(C) 4； (D) 1.6

2．若 $f(x)$ 为可微函数，则 $\mathrm{d}y$ 为(B)

（A)与 Δx 无关； (B) 为 Δx 的线性函数；

(C) 当 $\Delta x \to 0$，为 Δx 的高阶无穷小；

(D)与 Δx 为等价无穷小

3.设 $f(x)=x^n\sin\frac{1}{x}(x\neq 0)且f(0)=0,则f(x)$ 在$x=0$处（C ）

（A)仅当 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^n\sin\frac{1}{x}=f(0)=0$ 时才可微；

(B) 在任何条件下都可微；

(C) 当且仅当 $n>1$ 时才可微；

(D) 因为 $\sin\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处无定义，所以不可微。

三、 $y=\ln\arctan\frac{1}{x}$，求 $\mathrm{d}y$

$$dy=\frac{1}{\arctan\frac{1}{x}}\cdot d\arctan\frac{1}{x}=\frac{1}{\arctan\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}d\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\arctan\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$\therefore dy=-\frac{1}{(1+x^2)\arctan\frac{1}{x}}dx$$

四、设 $y=e^{-x}\sqrt[3]{\frac{(x+1)(x^2+2)}{3-x^3}}$，求 $\mathrm{d}y$

解：两边取对数得 $\ln y=-x+\frac{1}{3}\left(\ln(x+1)+\ln(x^2+2)-\ln(3-x^3)\right)$

两边微分得

$$\frac{1}{y}dy=\left[-1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{2x}{x^2+2}-\frac{-3x^2}{3-x^3}\right)\right]dx$$

$$\therefore dy=e^{-x}\sqrt{\frac{(x+1)(x^2+2)}{3-x^2}}\left[-1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{2x}{x^2+2}-\frac{-3x^2}{3-x^3}\right)\right]dx$$

五、设 $y=f(\ln x)e^{f(x)}$ 其中 $f(x)$ 可微，求 dy .

$$dy=d\left(f(\ln x)e^{f(x)}\right)=e^{f(x)}df(\ln x)+f(\ln x)d\left(e^{f(x)}\right)$$

解：

$$=f'(\ln x)e^{f(x)}d\ln x+f(\ln x)\left(e^{f(x)}\right)df(x)$$

$$=e^{f(x)}\left[\left(\frac{1}{x}\right)f'(\ln x)+f(\ln x)f'(x)\right]dx$$

________学院 ______班级 姓名________ 学号______

第 2 章 一元函数微分学

2.2.1 中值定理

答案：一、填空

1. 函数 $y = px^2 + qx + r$ 在区间 $[a,b]$ 满足 Lagrange 定理条件的点 $\xi = \underline{\dfrac{a+b}{2}}$；

2. 函数 $f\left(x\right)=\sin x$ 与 $F\left(x\right)=x+\cos x$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上使 Cauchy 定理结论成立的点 $\xi =$ $\underline{2\arctan\left(\dfrac{4}{\pi}-1\right)}$.

3. 设函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$，则 $f'(x)=0$ 有__3__个零点，它们分别位于区间 $\underline{(1,2),(2,3)(3,4)}$ 内.

解：因为 $f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=0$，函数 $f(x)$ 在区间 $(1,2),(2,3),(3,4)$ 上满足 *Rolle* 定理条件，由 *Rolle* 定理得至少有一点 $\xi_1\in(1,2),\ \xi_2\in(2,3),\ \xi_3\in(3,4)$ 使 $f'(\xi_i)=0\quad(i=1,2,3)$，又 $f'(x)$ 为一元三次函数，因而方程 $f'(x)=0$ 最多只有三个实根， 所以，方程 $f'(x)=0$ 有三个实根分别属于(1, 2), (2, 3), (3, 4).

二、选择题

1.下列函数中在 $[1,e]$ 上满足拉格朗日定理条件的是（B ）

(A) $\ln(\ln x)$； (B) $\ln x$；

(C) $\dfrac{1}{\ln x}$； (D) $\ln(2-x)$

2. 若 $a^2-3b<0$ 则方程 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c=0$（B ）

(A) 无实根; (B) 有唯一的实根;

(C) 有3个实根; (D) 有重实根.

3.设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个实数，且 $a_1-\dfrac{1}{3}a_2+\cdots+\left(-1\right)^{n-1}\dfrac{1}{2n-1}a_n=0$，则函数

$f\left(x\right)=a_1\cos x+a_2\cos 3x+\cdots+a_n\cos\left(2n-1\right)x$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内 (A)

(A) 至少有一个零点; (B) 至少有 2 个零点;

(C) 至少有 n 个零点; (D) 至少有 $\left(2n-1\right)$ 个零点.

解：令 $f(x)=a_1\cos x+a_2\cos 3x+\cdots a_n\cos(2n-1)x$，

则 $F(x)=a_1\sin x+\dfrac{a_2}{3}\sin 3x+\cdots\dfrac{a_n}{2n-1}\sin(2n-1)x$, 有 $F(0)=F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0,$

由洛尔定理得至少存在一个零点 $x_0\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 使 $F'(x_0)=0,$ 即 $f(x_0)==0$.

三、设函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,1\right]$ 上连续，在 $\left(0,1\right)$ 内可导，且 $f\left(0\right)=f\left(1\right)=0$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$，证明在 $\left(0,1\right)$ 内存在一点 ξ，使得 $f'\left(\xi\right)=1$.

证：$F(x)=f(x)-x,\quad F(0)=0,\ F(1)=-1, F\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$，因为后二等式成立，所以存在 $\eta\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 使 $F(\eta)=0,$ 故由 *Rolle* 定理 $\exists\xi\in\left(0,\eta\right)\subset(0,1)$ 使 $F'(\xi)=0$.即 $f'\left(\xi\right)=1$

四、证明： $\dfrac{a^{\frac{1}{n+1}}}{(n+1)^2}<\dfrac{a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}}{\ln a}<\dfrac{a^{\frac{1}{n}}}{n^2},\quad (a>1,n\geq 1).$

证：令 $f(x)=a^x, x\in\left[\dfrac{1}{n+1},\dfrac{1}{n}\right]$，应用拉格朗日中值定理，有 $\xi\in\left(\dfrac{1}{n+1},\dfrac{1}{n}\right)$，使得

$a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}=a^{\xi}\ln a\cdot\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right),$ 即 $\dfrac{a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}}{\ln a}=a^{\xi}\cdot\dfrac{1}{n(n+1)}$ 由于 $\dfrac{1}{n+1}<\xi<\dfrac{1}{n},$

$\dfrac{1}{(n+1)^2}<\dfrac{1}{n(n+1)}<\dfrac{1}{n^2}$，故 $\dfrac{a^{\frac{1}{n+1}}}{(n+1)^2}<\dfrac{a^{\xi}}{n(n+1)}<\dfrac{a^{\frac{1}{n}}}{n^2},\ \dfrac{a^{\frac{1}{n+1}}}{(n+1)^2}<\dfrac{a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}}{\ln a}<\dfrac{a^{\frac{1}{n}}}{n^2}.$

五、(8 分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 $(0<a<b),$ 在 (a,b) 内可导，证明在 (a,b) 内存在 ξ,η 使得

$f'(\xi)=\dfrac{\eta^2}{ab}f'(\eta)$.

证：对$f(x)$和$g(x)=\dfrac{1}{x}$在$[a,b]$上应用cauchy中值定理知,存在$\eta\in(a,b)$,使

$\dfrac{f(b)-f(a)}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}}=\dfrac{f'(\eta)}{-\dfrac{1}{\eta^2}}=-\eta^2 f'(\eta)$,即$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{\eta^2 f'(\eta)}{ab}$. 由 Lagrange 中值定理知,存在$\xi\in(a,b)$,使得$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$, 于是$f'(\xi)=\dfrac{\eta^2 f'(\eta)}{ab}$.

第 2 章　一元函数微分学

2.2.2 Taylor 公式

答案：一、填空题

1．函数 $f(x)=x^2e^x$ 在 $x=1$ 处的高阶导数 $f^{(100)}(1)=\underline{e\cdot 10101}$

解：设 $x=u+1$，则 $f(x)=g(u)=(u+1)^2e^u\cdot e$， $f^{(n)}(1)=g^{(n)}(0)$，

则 $g(u)=e(u^2+2u+1)\left(1+u+\cdots+\frac{1}{98!}u^{98}+\frac{1}{99!}u^{99}+\frac{1}{100!}u^{100}+o(u^{100})\right)$

而 $g(u)$ 的泰勒展开式含 u^{100} 的项应为 $\frac{g^{(100)}(0)}{100!}u^{100}$，比较得

$\frac{g^{(100)}(0)}{100!}=e\left(\frac{1}{98!}+\frac{2}{99!}+\frac{1}{100!}\right)$，所以 $f^{(100)}(1)=g^{(100)}(0)=e\cdot 10101$.

2. $x^4-5x^3-x^2-3x+4$ 按 $(x-4)$ 的乘幂展开的多项式为 $\underline{-56+21(x-4)+37(x-4)^2+11(x-4)^3+(x-4)^4}$.

因为 $f(4)=-56, f'(4)=21, f''(4)=74, f'''(4)=66, f^{(4)}=24$ 故

$$x^4-5x^3-x^2-3x+4=f(4)+f'(4)(x-4)+\frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2+\frac{f'''(4)}{3!}(x-4)^3+\frac{f'''(4)}{4!}(x-4)^4$$
$$=-56+21(x-4)+37(x-4)^2+11(x-4)^3+(x-4)^4$$

3. $$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[4]{16x^4-8x^3+10x-7}-ax-b)=\lim_{t\to0^+}\left(\sqrt[4]{\frac{1}{t^4}-\frac{1}{t^3}+\frac{5}{t}-7}-\frac{a}{2t}-b\right)$$
$$=\lim_{t\to0^+}\frac{1}{t}\left(\left(1-t+5t^3-7t^4\right)^{\frac{1}{4}}-\frac{a}{2}-bt\right)=\lim_{t\to0^+}\frac{1}{t}\left[1+\frac{1}{4}(-t+5t^3-7t^4)+o(t-5t^3+7t^4)-\frac{a}{2}-bt\right]$$
$$=\lim_{t\to0^+}\frac{1-\frac{a}{2}}{t}-\left(\frac{1}{4}+b\right)$$

由已知有：$1-\frac{a}{2}=0$ 且 $\frac{1}{4}+b=0$，故 $a=\frac{1}{2}$， $b=-\frac{1}{4}$.

二：（1） $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt[4]{x^4-2x^3})$

解：令 $x=\dfrac{1}{t}$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt[4]{x^4-2x^3})=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\sqrt[3]{1+3t}-\sqrt[4]{1-2t}}{t}$

令 $g(t)=\sqrt[3]{1+3t}-\sqrt[4]{1-2t}$， $g'(t)=(1+3t)^{-\frac{2}{3}}+(1-2t)^{-\frac{3}{4}}\cdot\dfrac{1}{2},\therefore g(t)=\dfrac{3}{2}t+o(t)$

$$\lim_{t\to0^+}\frac{g(t)}{t}=\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{3}{2}t+o(t)}{t}=\frac{3}{2}.$$

(2)

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(\sin x)}{2\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{1-\left[1-\frac{\sin^2 x}{2}+o(\sin^2 x)\right]}{2[x^2+o(x^2)]}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}\sin^2 x+o(\sin^2 x)}{2[x^2+o(x^2)]}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}\frac{\sin^2 x}{x^2}+\frac{o(\sin^2 x)}{x^2}}{1+2\frac{o(x^2)}{x^2}}=\frac{1}{4}$$

三、.求 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$ 在 $x=0$ 点处带拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式。

解： $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}=-1+\dfrac{2}{1+x}$

$f'(x)=2\cdot(-1)\dfrac{1}{(1+x)^2}$， $f''(x)=2\cdot(-1)^2\dfrac{2!}{(1+x)^3}$ $f'''(x)=2\cdot(-1)^3\dfrac{3!}{(1+x)^4}$

归纳得 $f^{(n)}(x)=2\cdot(-1)^n\dfrac{n!}{(1+x)^{n+1}}$

所以 $f(x)=f(0)+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$，$(0<|\theta|<1)$

即 $f(x)=1+2\sum\limits_{k=1}^{n}\cdot(-1)^k x^k+2(-1)^{n+1}\dfrac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}}$，$(0<|\theta|<1)$.

四、求 $f(x)=\ln x$ 按 $x-2$ 的幂展开的带有皮亚诺型余项的 n 阶泰勒公式。

$$\ln x=\ln 2+\frac{1}{2}(x-2)-\frac{1}{2^3}(x-2)^2+\frac{1}{3\cdot2^3}(x-2)^3-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n\cdot2^n}(x-2)^n+o((x-2)^n)$$

五、设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 具有三阶连续导数，且 $f(0)=1,\ f(1)=2,\ f'(\frac{1}{2})=0,$

证明：至少存在点 $\xi\in(0,1)$ 使 $|f'''(\xi)|\geq24$.

证明：由二阶泰勒公式

$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\frac{1}{3!}f'''(\xi)(x-x_0)^3$，其中 ξ 在 x_0, x 之间。令 $x=0, x_0=\frac{1}{2}$ 则

$$f(0)=f(\frac{1}{2})+f'(\frac{1}{2})\left(0-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2!}f''(\frac{1}{2})\left(0-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3!}f'''(\xi_1)\left(0-\frac{1}{2}\right)^3, \qquad (1)$$

$0<\xi_1.<\frac{1}{2}.$

令 $x=1, x_0=\frac{1}{2}$ 则

$$f(1)=f(\frac{1}{2})+f'(\frac{1}{2})\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2!}f''(\frac{1}{2})\left(1-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3!}f'''(\xi_2)\left(1-\frac{1}{2}\right)^3, \qquad (2)$$

$\frac{1}{2}<\xi_2<1.$

将（2）式减去(1)式，得

$$f(1)-f(0)=f'(\frac{1}{2})+\frac{1}{48}\left[f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)\right]\Rightarrow\frac{1}{48}\left[f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)\right]=1$$

即 $48\le|f'''(\xi_1)|+|f'''(\xi_2)|$，

于是 $2\max\{|f'''(\xi_1)|,|f'''(\xi_2)|\}\ge|f'''(\xi_1)|+|f'''(\xi_2)|\ge 48$

即 $\max\{|f'''(\xi_1)|,|f'''(\xi_2)|\}\ge 24$

所以，在区间 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $|f'''(\xi)|\ge 24.$

第 2 章　一元函数微分学

2.2.3　　洛必达法则

答案：

一：填空题：

1．当 $x\to 0$ 时，$e^x-(ax^2+bx+1)$ 是比 x^2 的高阶无穷小，则 $a=\dfrac{1}{2},b=1.$

2．2．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-x)(1-\sqrt{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^n}=$ ________.

3．$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-x)(1-\sqrt{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^n}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-x}\cdots\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt[n]{x}}{1-x}=1\cdot\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{-1}\cdots\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-\frac{1}{n}x^{-\frac{n-1}{n}}}{-1}=\dfrac{1}{n!}$

3. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2arctgx-\ln\frac{1+x}{1-x}}{x^m}=a(\neq 0)$, 则 $m=$ __________, $a=$ _________.

解：

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2arctgx-\ln\frac{1+x}{1-x}}{x^m}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2arctgx-\ln(1+x)+\ln(1-x)}{x^m}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{2}{1+x^2}-\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1-x}}{mx^{m-1}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-4x^2}{mx^{m-1}(1+x^2)(1-x^2)}=-\frac{4}{m}\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^{m-3}}=a\Rightarrow\begin{cases}m=3\\ a=-\dfrac{4}{3}\end{cases}$$

二、选择题：

1．若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$ 为（　C　）

(A) 0；　　　　(B) 6；

(C) 36；　　　　(D) ∞

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0,$，根据极限与无穷小的关系知 $\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=\alpha(x),$

其中 $\alpha(x)$ 为 $x\to 0$ 的无穷小量。故 $f(x)=x^2\alpha(x)-\frac{\sin 6x}{x}$，

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{6+x^2\alpha(x)-\frac{\sin 6x}{x}}{x^2}\lim_{x\to 0}\alpha(x)+\lim_{x\to 0}\frac{6x-\sin 6x}{x^3}=0+\lim_{x\to 0}\frac{6-\cos 6x}{3x^2}$$
$$=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{6\sin 6x}{2x}=36$$

2．当 $x\to 0$ 时，$e^{tgx}-e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小，则 n 为（ C ）

(A) 1;； (B) 2；

(C) 3； (D) 4

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{tgx}-e^x}{x^n}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{tgx-x}-1}{x^n}\cdot\lim\limits_{x\to 0}e^x=\cdots=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cos x\sin x}{n(n-1)x^{n-2}}=\frac{2}{n(n-1)}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^{n-2}}$

因 $e^{tgx}-e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小，则 $n-2=1\Rightarrow n=3$

3．$\lim\limits_{x\to 0}\frac{atgx+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^x)}=2$，其中 $a^2+c^2\neq 0,$ 则必有（D ）

(A) $b=4d$ ； (B) $b=-4d$；

(C) $3a=4c$； (D) $a=-4c$

解：运用洛必达法则得：

$$\lim_{x\to 0}\frac{atgx+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{a}{\cos^2 x}+b\sin x}{\frac{-2c}{1+2x}+2xde^{-x^2}}=\frac{a}{-2c}=2$$

即 $a=-4c$

三．计算下列极限

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{arc\cot x}$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)$ 3. $\lim\limits_{x\to\infty}(tg\frac{\pi x}{2x+1})^{\frac{1}{x}}$；

4. $\lim\limits_{x\to 1^-}\ln x\ln(1-x)$； 5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$. 6. $\lim\limits_{x\to\infty}(ntg\frac{1}{n})^{n^2}$ (n 为自然数)

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{arc\cot x}\overset{洛必达}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{x}{1+x}(-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{1+x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^2}{x+x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}=1$

2. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n}\right)=\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{m-mx^n-n+nx^m}{1-x^m-x^n+x^{m+n}}\right)==\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{mnx^{m-1}-mnx^{n-1}}{(m+n)x^{m+n-1}-mx^{m-1}-nx^{n-1}}\right)$

$\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{mn(m-1)x^{m-2}-mn(n-1)x^{n-2}}{(m+n)(m+n-1)x^{m+n-2}-m(m-1)x^{m-2}-n(n-1)x^{n-2}}\right)=\dfrac{mn(m-1)-mn(n-1)}{(m+n)(m+n-1)-m(m-1)-n(n-1)}$

$=\dfrac{m-n}{2}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}(tg\dfrac{\pi x}{2x+1})^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}\ln\left(tg\frac{\pi x}{2x+1}\right)}$,

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(tg\frac{\pi x}{2x+1}\right)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{tg\frac{\pi x}{2x+1}}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\frac{\pi x}{2x+1}}\cdot\dfrac{\pi(2x+1)-2\pi x}{(2x+1)^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\pi}{\sin\frac{2\pi x}{2x+1}}\cdot\dfrac{1}{(2x+1)^2}$

$=2\pi\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{(2x+1)^2}}{\sin\frac{2\pi x}{2x+1}}=2\pi\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-\frac{4}{(2x+1)^3}}{\cos\left(\frac{2\pi x}{2x+1}\right)\cdot\frac{2\pi}{(2x+1)^2}}=-4\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{(2x+1)\cos\left(\frac{2\pi x}{2x+1}\right)}=0$

$\therefore\lim\limits_{x\to\infty}(tg\dfrac{\pi x}{2x+1})^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}\ln\left(tg\frac{\pi x}{2x+1}\right)}=1,$

4.解: $\lim\limits_{x\to1^-}\ln x\ln(1-x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\ln x}}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\frac{-1}{1-x}}{\frac{1}{\ln^2 x}\left(-\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x\ln^2 x}{1-x}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\ln^2 x-2x\ln x\cdot\frac{1}{x}}{-1}=0$

5. 令 $y=(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$ 则 $\ln y=(\dfrac{\pi}{2}-x)\ln\cos x$

而 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\dfrac{\pi}{2}-x)\ln\cos x=\lim\limits_{t\to0^+}t\cdot\ln\sin t=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\ln\sin t}{t^{-1}}=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\cot t}{-t^{-2}}=\lim\limits_{t\to0^+}(-\dfrac{t^2}{\tan t})=\lim\limits_{t\to0^+}(-\dfrac{t^2}{t})=0$

（令$\dfrac{\pi}{2}-x=t$）所以 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}y=e^0=1.$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}(ntg\dfrac{1}{n})^{n^2}=\lim\limits_{x\to\infty}(xtg\dfrac{1}{x})^{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{x^2\left[\ln x+\ln tg\frac{1}{x}\right]}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left[\ln x+\ln tg\frac{1}{x}\right]}$

$$\overset{x=\frac{1}{y}}{=} e^{\lim\limits_{y\to 0^+}\frac{-\ln y+\ln(tgy)}{y^2}} = e^{\lim\limits_{y\to 0^+}\frac{-\frac{1}{y}+\frac{\sec^2 y}{tgy}}{2y}} = e^{\lim\limits_{y\to 0^+}\frac{y-\frac{1}{2}\sin 2y}{2y^2\sin y}+\lim\limits_{y\to 0^+}\frac{1}{\cos y}} = e^{\frac{1}{3}}$$

四、.试确定常数 A,B,C 的值，使得 $e^x(1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3),$ 其中 $o(x^3)$ 是当 $x\to 0$ 时比 x^3 的高阶无穷小.

解：根据题设和洛必达法则：

$$0=\lim_{x\to 0}\frac{e^x(1+Bx+Cx^2)-1-Ax}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x(1+B+Bx+2Cx+Cx^2)-A}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x[2C+1+2B+(B+4C)x+Cx^2]}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{B+4C+2Cx]}{6}$$

$$\text{得}\begin{cases}1+\mathrm{B}-\mathrm{A}=0\\ 2\mathrm{B}+2C+1=0\text{得}A=\dfrac{1}{3},B=-\dfrac{2}{3},C=\dfrac{1}{6}\\ B+4C=0\end{cases}$$

五、.设函数 $f(x)$ 有一阶连续导数， $f''(0)$ 存在，且 $f(0)=0$.又函数

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$$

（**1**）确定常数 a 的值，使 $g(x)$ 处处连续；

（2）对（1）中确定的 a，讨论 $g'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续性。

解：（1） $a=\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0).$

（2）当 $x\neq 0,$时， $g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$；

当 $x=0$ 时，

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{x}-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-xf'(0)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\frac{1}{2}f''(0)$$

$$\therefore g'(x)=\begin{cases}\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2} & x\neq 0\\ \dfrac{1}{2}f''(0) & x=0\end{cases}$$

再讨论 $g'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续性

当 $x \neq 0,$时， $g'(x)$ 连续。当 $x = 0$ 时

$$\lim_{x\to 0} g'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{xf'(x) - xf'(0) + xf'(0) - f(x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{xf'(x) - xf'(0)}{x^2} + \lim_{x\to 0} \frac{xf'(0) - f(x)}{x^2} == \lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} + \lim_{x\to 0} \frac{f'(0) - f'(x)}{2x}$$

$$= f''(0) - \frac{1}{2} f''(0) = -\frac{1}{2} f''(0) = g'(0)$$

$\therefore g'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续。

第 2 章　一元函数微分学

2.3.1 函数的单调增减性的判定　2.3.2 函数的极值及其求法
2.3.3 最大值及最小值的求法

一、填空

1．函数 $y = x - \ln(x+1)$ 的单调递减区间为 (-1, 0) ，单调递增区间为 (0，+∞)

2.　函数 $y = \begin{cases} x^{3x} & x > 0 \\ x+1 & x \le 0 \end{cases}$ 当 $x = \frac{1}{e}$， $y = \left(\frac{1}{e}\right)^{3/e}$ 为极小值，当 $x = 0$， $y = 1$ 为极大值

3. 函数 $f\left(x\right) = x + 2\sqrt{x}$ 在 $\left[0,4\right]$ 上的最大值为 8 ，最小值为 0 ；

二、　选择题

1．$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^2} = -1$ 则 $f(x)$ 在 $x = a$ 处(C)

(A)　不可导；　　　　(B)　可导且 $f'(a) \ne 0$

(C)　有极大值　　　　(D)　有极小值

2．函数 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + k(k > 0)$ 在 $(0,+\infty)$ 的零点个数为 (B)

(A) 1　　　　(B) 2

(C) 3　　　　(D) 0

3. 设方程 $kx + \frac{1}{x^2} = 1$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 有且仅有一个实根, 则 k 的取值范围为 (　D　　)

(A) $\left(-\infty, \frac{2\sqrt{3}}{9}\right]$;　　　　(B) $\left(-\infty, 0\right]$;

(C) $\left\{\frac{2\sqrt{3}}{9}\right\} \cup \left(-\infty, 0\right)$;　　　　(D) $\left\{\frac{2\sqrt{3}}{9}\right\} \cup \left(-\infty, 0\right]$

三、当 $x > 0$ 时，$(x^2 - 1)\cdot \ln x \ge (x-1)^2$.

证明：令 $\varphi(x) = \ln x - \frac{x-1}{x+1}$, 则 $\varphi'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{x^2+1}{x(x+1)^2}$, 故当 $x > 0, \varphi'(x) > 0,$ 故 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增, $\varphi(1) = 0,$ 所以当 $0 < x < 1$ 时，$\varphi(x) < 0.$

当 $1 < x < +\infty$ 时，$\varphi(x) > 0$. 于是当 $x > 0$ 时 $(x^2-1)\varphi(x) = (x^2-1)\ln x - (x-1)^2 \geq 0$, 即 $(x^2-1)\cdot\ln x \geq (x-1)^2$.

四、设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = 1$, 且 $f''(x) > 0$, 证明 $f(x) \geq x$.

证明：按题意 $f''(x)$ 存在，于是 $f(x)$ 连续，又 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = 1$, 知 $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = 1$, 令 $F(x) = f(x) - x$，则 $F'(x) = f'(x) - 1, F''(x) = f''(x) > 0$, 且 $F'(x)$ 单调增加，从而当 $x > 0$, $F'(x) > F'(0) = f'(0) - 1 = 0$, 当 $x < 0$, $F'(x) < F'(0) = 0$, 即 $F(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 单调下降，在 $[0, +\infty)$ 单调上升，因此 $F(x)$ 的最小值是 $F(0)$，故 $\forall x \in R$ 有 $F(x) \geq F(0) = 0$,

即 $f(x) \geq x$。

五． 已知某物资全年需要量为 a 吨，分若干批生产，每批生产的准备费为 1440 元，除准备费外，每批生产中直接消耗的费用与产量的平方成正比. 当每批生产 50 吨时，直接消耗的生产费用是 1000 元. 求每批生产多少吨时全年的总费用最省?

解 设每批生产 x 吨，则全年需分 $\dfrac{a}{x}$ 批生产，总的生产准备费用为 $y_1 = 1440\dfrac{a}{x}$

依题意，每批直接消耗的生产费用为 $z = kx^2$，将 $z\big|_{x=50} = 1000$ 代入上式，解得 $k = 0.4$，

即 $z = 0.4x^2$. 直接消耗的生产费用之和为 $y_2 = 0.4x^2 \cdot \dfrac{a}{x} = 0.4ax$.

全年的总费用 $y = y_1 + y_2 = 1440\dfrac{a}{x} + 0.4ax\left(x > 0\right)$ 作为目标函数.

令 $y' = -\dfrac{1440a}{x^2} + 0.4a = 0$，解得 $x_1 = 60, x_2 = -60$ (舍去),

又 $y''\big|_{x=60} = \dfrac{2\times 1440}{60^3} > 0$，故 $x = 60$ 是唯一极小值点，同时也是最小值点.

第 2 章　一元函数微分学

2.3.4 曲线的凹性及其判定法　2.3.5 曲线的拐点及其求法
2.3.6 曲线的渐近线　2.3.7 函数图形的描绘方法

答案：一、填空题

1. $y=x^2e^{-x^2}$ 的渐近线方程为__y=0____.

2．曲线 $y=\dfrac{(x^2+2x-3)e^{\frac{1}{x}}}{(x^2-1)arctgx}$ 的渐近线的条数为 __3 条____.

解：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x^2+2x-3)e^{\frac{1}{x}}}{(x^2-1)arctgx}=\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{2}{\pi}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x^2+2x-3)e^{\frac{1}{x}}}{(x^2-1)arctgx}=-\dfrac{2}{\pi}$

故 $y=\dfrac{2}{\pi}$ 及 $y=-\dfrac{2}{\pi}$ 为 $f(x)$ 的水平渐近线。

（2）使 $f(x)$ 没有意义的点 $x=-1, x=0, x=1,$

$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x^2+2x-3)e^{\frac{1}{x}}}{(x^2-1)arctgx}=\infty$，$x=-1$ 是铅直渐近线。

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x^2+2x-3)e^{\frac{1}{x}}}{(x^2-1)arctgx}=\dfrac{8e}{\pi}$，$x=1$ 不是铅直渐近线。$\left(-\dfrac{2}{3},-\dfrac{4}{81}\right)$

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(x^2+2x-3)e^{\frac{1}{x}}}{(x^2-1)arctgx}=3\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{arctgx}=\infty$，$x=0$ 是铅直渐近线。

2.. 曲线 $y=x\cdot\sqrt[3]{(x-1)^5}$ 在 $\underline{\left(-\infty,\dfrac{3}{4}\right)}$ 和 $\underline{(1,+\infty)}$ 内是凹的，在 $\underline{\left(\dfrac{3}{4},1\right)}$ 内是凸的，拐点为

$\underline{\left(\dfrac{3}{4},-\dfrac{3\cdot\sqrt[3]{4}}{64}\right)}$ 和 $\underline{(1,0)}$

二、.选择题.

1. 下列说法中正确的是（　D　）

(A) 若 $(x_0, f(x_0))$ 为拐点，则 $f''(x_0)=0$；　(B) 若 $f''(x_0)=0$，则 $(x_0, f(x_0))$ 必为拐点;

(C) 若$\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$为拐点，则在$\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$处曲线必有切线; (D) 以上说法都不正确.

2.曲线 $y=\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$ (D)

(A) 没有渐近线 (B) 仅有水平渐近线

(C) 仅有铅直渐近线 (D) 既有水平渐近线，又有铅直渐近线

3．设 $f(x)$ 的导数在 $x=a$ 处连续，又 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{x-a}=-1$ 则(B)

(A) $x=a$ 是 $f(x)$ 的极小值点 (B) $x=a$ 是 $f(x)$ 的极大值点

(C) $(a, f(a))$ 是曲线 $y=f(x)$ 拐点

(D) $x=a$ 不是 $f(x)$ 的极值点，$(a, f(a))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 拐点

解：由 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{x-a}=-1$，得 $\lim\limits_{x\to a}f'(x)=0$，又 $f(x)$ 的导数在 $x=a$ 处连续，可得 $\lim\limits_{x\to a}f'(x)=f'(a)=0$，$\therefore f''(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)-f'(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{x-a}=-1<0$ 所以 $x=a$ 是 $f(x)$ 的极大值点.

三、证明不等式 $tgx+tgy>2tg\dfrac{x+y}{2},\quad 0<x<y<\dfrac{\pi}{2}.$

证：令 $f(x)=tgx, f'(x)=\sec^2 x$. $f''(x)=2\sec^2 x tgx>0\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$,

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内是凹的，即有 $\dfrac{1}{2}[f(x)+f(y)]>f\left(\dfrac{x+y}{2}\right), 0<x<y<\dfrac{\pi}{2}$.

由此得 $tgx+tgy>2tg\dfrac{x+y}{2}, 0<x<y<\dfrac{\pi}{2}$.

四、试决定 $y=k(x^2-3)^2$ 中 k 的值，使曲线在拐点处的法线通过原点.

解：显然 $k \neq 0$，否则曲线为 $y=0$，它没有拐点，

$$y' = 4kx(x^2-3), \qquad y'' = 12k(x^2-1)$$

令 $y''=0$ 得 $x_{1,2}=\pm 1$ 且在 ± 1的左右两侧，y'' 均改变符号,

$\therefore$ 拐点为 $(-1,\ 4k)$，$(1,\ 4k)$.

从而在拐点处的法线方程分别为

$$y-4k=-\frac{1}{8k}(x+1) \quad 及 \quad y-4k=\frac{1}{8k}(x-1)$$

又法线过原点，由此均得 $-4k=-\dfrac{1}{8k}$

$$\therefore \qquad k=\pm\frac{\sqrt{2}}{8}.$$

五、描绘曲线 $y=\dfrac{2}{1+3e^{-x}}$ 的图形.

解：定义域：$(-\infty,+\infty)$，无奇偶性、周期性

渐近线：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{1+3e^{-x}}=2$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{1+3e^{-x}}=0$

$\therefore$ 有两条渐近线：$y=2$，$y=0$

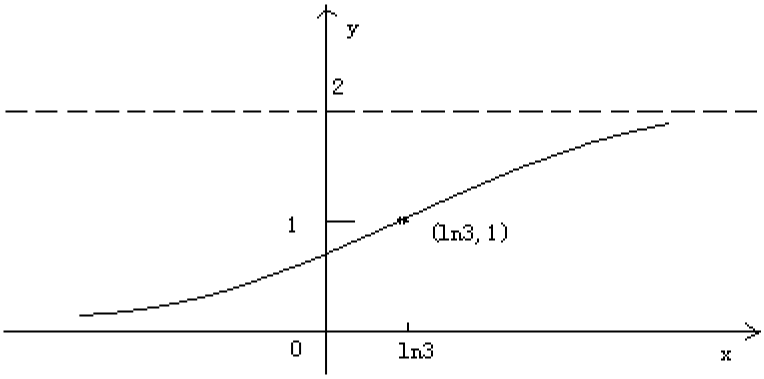
又 $y'=\dfrac{6e^{-x}}{(1+3e^{-x})^2}>0$ 单增

$$y''=\frac{6e^{-x}(3e^{-x}-1)}{(1+3e^{-x})^3}, \qquad y''=0 \Rightarrow x=\ln 3,$$

拐点 $(\ln 3, 1)$，列表讨论：

x	$(-\infty,\ln 3)$	$\ln 3$	$(\ln 3,+\infty)$
$f'(x)$	+		+
$f''(x)$	+	0	−
$f(x)$	凹增	拐点	凸增

如图：



第 2 章　一元函数微分学

2.3.8 弧微分・曲率　　2.3.9 曲率圆・曲率半径

一、填空题

1．椭圆 $4x^2+y^2=4$ 在点 $(0,2)$ 处的曲率为__________.

2.设抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 在 $x=0$ 处与曲线 $y=e^x$ 相切, 又有共同的曲率半径， 则

$a=$______, $b=$______, $c=$______.

解：依题意有： $\because\ y'|_{x=0}=(2ax+b)|_{x=0}=b,\quad y''=2a;$

$$y'|_{x=0}=e^x|_{x=0}=1,\qquad y''|_{x=0}=1;$$

$\therefore\quad b=1\quad$ 又 $\quad y(0)=c=e^0=1,$

在$x=0$处,两曲线的曲率半径相等即曲率相等.有

$$\frac{|2a|}{(1+1)^{3/2}}=\frac{1}{(1+1)^{3/2}}\ \Rightarrow\ a=\pm\frac{1}{2}.\quad 故\ a=\pm\frac{1}{2},\ b=1\ ,c=1.$$

3. 曲线 $y=\ln x$ 上曲率 $k(x)$ 的最大值=____________.

解．$y=\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，在其定义域内有 $y'=\dfrac{1}{x}, y''=-\dfrac{1}{x^2}$，所以曲线上任意点 x

处的曲率为 $k\left(x\right)=\dfrac{\left|y''\right|}{\left[1+\left(y'\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{\frac{1}{x^2}}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{x}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$，显然 $k\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上可导,

且

$$k'\left(x\right)=\frac{1-2x^2}{\left(1+x^2\right)^{\frac{5}{2}}}\begin{cases}>0,0<x<\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ =0,x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ >0,x>\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$$

，由此可知，$k\left(x\right)$ 在点 $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 处取得最大值 $\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$.

二、选择题

1．若 $f''(x)$ 不变号，且曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处的曲率圆为 $x^2+y^2=2$，则函数 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内（ B ）

(A) 有极值点，无零点 (B) 无极值点，有零点

(C 有极值点，有零点 (D) 无极值点，无零点

解：由题意知，$f(x)$ 是一个凸函数，即 $f''(x)<0$，由 $k=\dfrac{|y''|}{(1+(y')^2)^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，

得到 $y'(1)=f'(1)=-1$ 与 $y''(1)=f''(1)=-2$，在 $[1,2]$ 上 $f'(x)\le f'(1)=-1<0,$ 即 $f(x)$ 单调减少，没有极值点，又 $f(2)-f(1)=f'(\xi)<-1,\xi\in(1,2), f(2)<0. f(1)=1>0$，

由零点定理，$f(x)$ 在 $[1,2]$ 上有零点，应选（B）.

2．抛物线 $y=x^2-4x+3$ 在顶点处的曲率及曲率半径为（ B ）

(A) 顶点 $(2,-1)$ 处的曲率为 $\dfrac{1}{2}$，曲率半径为 2；

(B) 顶点 $(2,-1)$ 处的曲率为 2，曲率半径为 $\dfrac{1}{2}$ ；

(C)顶点$(-1,2)$处的曲率为 1，曲率半径为 1；

(D) 顶点$(-1,2)$处的曲率为$\frac{1}{2}$，曲率半径为 2.

解:抛物线顶点$(2,-1)$，$y'=2x-4, y''=2$，故顶点处的曲率为$k=\left.\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}\right|_{x=2}=2$，曲率半径为$\rho=\frac{1}{2}$.

3.求曲线$x=t-\sin t, y=1-\cos t$ 上对应于参数$t=\pi$的点P处的曲率圆方程为（ D ）

（A）$(x-\pi)^2+(y-2)^2=16$ （B）$(x-\pi)^2+(y-2)^2=\frac{1}{16}$

（C）$(x-\pi)^2+(y-2)^2=4$ （D）$(x-\pi)^2+(y+2)^2=16$

解：先求出对应参数$t=\pi$的点$P(\pi,2)$，再由$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin t}{1-\cos t}, \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{(1-\cos t)^2}$，

可得$\left.\frac{dy}{dx}\right|_P=0, \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_P=-\frac{1}{4}$，所以曲线在点$P$的曲率半径$R|_{(\pi,2)}=\left.\frac{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}\right|_{(\pi,2)}=4$，

曲率中心坐标为$\alpha=\pi-\left.\frac{y'[1+(y')^2]}{|y''|}\right|_{(\pi,2)}=\pi$，$\beta=2+\left.\frac{1+(y')^2}{|y''|}\right|_{(\pi,2)}=-2$，

于是得到曲率圆方程为$(x-\pi)^2+(y+2)^2=16$.

二、选择题

三、求双纽线$r^2=a^2\cos 2\theta$在$\theta=0$处的曲率及曲率半径.

解：$r'=-\frac{a\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$ $r''=-\frac{a(1+\cos^2 2\theta)}{\cos 2\theta\sqrt{\cos 2\theta}}$

$\therefore$ $r'|_{\theta=0}=0$ $r''|_{\theta=0}=-2a$ 又 $r|_{\theta=0}=a$

$\therefore$ $k|_{\theta=0}=\left.\frac{|r^2+2r'^2-rr''|}{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|\theta=0=\frac{3}{a}$, $R=\frac{a}{3}$.

四、一飞机沿路径$y=\sqrt{\frac{x^2+3000000}{3}}$（$y$轴铅直向上，单位为米)作俯冲飞行，在最低点处飞机的速度最大为$v=200m/s$，飞行员体重$G=70kg$，求飞机俯冲时座椅对飞行员的

反力的最大值.

解：飞行路径是方程为 $\dfrac{y^2}{1000^2}-\dfrac{x^2}{(1000\sqrt{3})^2}=1$，$(y>0)$ 的双曲线上支，最低点即顶点有最小的曲率半径 $r=3000$ 米，所以飞行员所受的最大的向心力 $F=\dfrac{mv^2}{r}=\dfrac{70\times 200^2}{3000}=\dfrac{2800}{3}$ 牛，故飞机俯冲时座椅对飞行员的反力的最大值为 $F+mg=\dfrac{2800}{3}+70\times 9.8=1619.33$ 牛

五、t 为何值时， 曲线 $\begin{cases} x=a\left(t-\sin t\right) \\ y=a\left(1-\cos t\right) \end{cases}, 0\le t\le 2\pi$ 的曲率最小？求出最小曲率，写出该点的曲率半径.

解：$k(t)=\dfrac{1}{4a\left|\sin\dfrac{t}{2}\right|}$，欲使 $k(t)$ 最小，等价于 $\left|\sin\dfrac{t}{2}\right|$ 最大，故当 $\left|\sin\dfrac{t}{2}\right|=1$，即

$\left|\sin\dfrac{t}{2}\right|=1$，即 $t=\boldsymbol{\pi}$ 时曲率最小，且 $k_{\min}=\dfrac{1}{4a}, R=\dfrac{1}{k}=4a.$