高等数学A

第2章 一元函数微分学

2.1 导数及微分

2.1.13 微分概念

2.1.14 微分的求法 微分形式不变性

中南大学开放式精品示范课堂高等数学建设组

2.1 导数及微分

导数及微分

- 2.1.13 微分概念
  - 微分的定义
  - 可导与可微的关系
  - 微分的计算公式
  - 微分的几何意义
- 2.1.14 微分的求法 微分形式不变性
  - 基本初等函数的微分公式
  - 四则运算法则
  - 复合函数的微分法则（一阶微分形式不变性）
  - 求微分的习例2-10
- 2.1.15 微分应用于近似计算及误差的估计
  - 微分在近似计算中的应用
  - 微分在估计误差中的应用
- 内容小结及课堂练习

习题课
- 结构框图
- 内容小结
- 典型习例

一.微分的概念

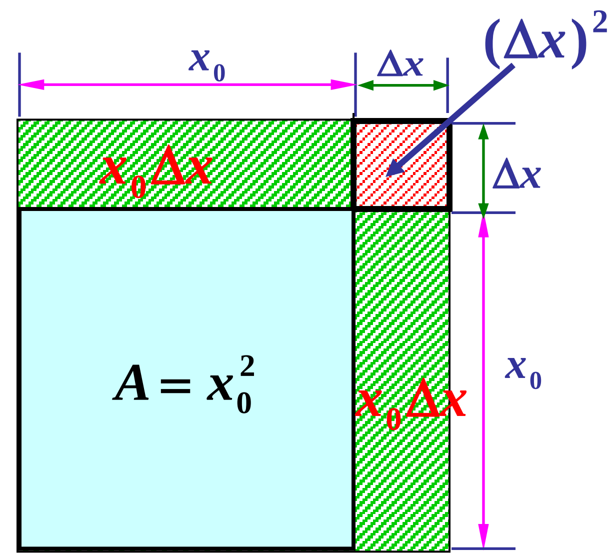
引例: 正方形金属薄片受热后面积的改变量.

设边长由x_0变到$x_0+\Delta x$,

$\because$ 正方形面积 $A = x_0^{\,2}$,

$$\therefore \Delta A = (x_0+\Delta x)^2 - x_0^2$$

$$= \underbrace{2x_0\cdot\Delta x}_{(1)} + \underbrace{(\Delta x)^2}_{(2)}.$$



(1) Δx的线性函数,且为ΔA的主要部分;

(2) Δx的高阶无穷小,当$|\Delta x|$很小时可忽略.

问题: 这个线性函数(改变量的主要部分)是否所有函数的改变量都有?它是什么?如何求?

1. 微分定义

定义：若 $y=f(x)$在x_0处的增量 $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$,

其中A为常数，则称 $y=f(x)$ 在 x_0可微.

而$A\Delta x$称为$y=f(x)$在x_0的微分.记为

$$dy\big|_{x=x_0}=A\Delta x.$$

由定义可得: (1) dy是自变量的改变量Δx的线性函数;

(2) $\Delta y - dy = o(\Delta x)$是比$\Delta x$高阶无穷小;

(3) 当$A\neq 0$时, dy与Δy是等价无穷小;

$$\because \frac{\Delta y}{dy}=1+\frac{o(\Delta x)}{A\cdot\Delta x}\to 1 \quad (\Delta x\to 0).$$

(4) A是与Δx无关的常数,但与$f(x)$和x_0有关;

(5) 当$|\Delta x|$很小时,$\Delta y \approx dy$ (线性主部).

2. $y=f(x)$在x_0处可导与可微的关系

定理 $y=f(x)$在x_0处可微 $\Leftrightarrow$

$y=f(x)$在x_0处可导,且$f'(x_0)=A$.

证明: $\Rightarrow$ 设 $f(x)$ 在 x_0处可微,则

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x), \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}.$$

$$\therefore \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left[A+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right] = A.$$

即 $f'(x_0)=A$.

$\therefore y=f(x)$ 在 x_0处可导, 且 $f'(x_0)=A$.

$\Leftarrow$ 设 $y=f(x)$ 在 x_0 处可导, 则

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0).$$

从而 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha,$ 且 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha=0,$

$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha\cdot\Delta x=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x),$$

$\therefore\ y=f(x)$ 在 x_0 处可微.

3. 微分的计算公式

$$dy|_{x=x_0} = f'(x_0)\Delta x \qquad dy = f'(x)\Delta x = y'\Delta x$$

例1. 设 $y = x$, 求 dy.

解: $\because y' = 1$, $\therefore dy = \Delta x \rightarrow dx = \Delta x$.

通常把自变量x的增量Δx称为自变量的微分,

记作dx, 即$dx = \Delta x$.

所以微分的计算公式如下:

$$dy|_{x=x_0} = f'(x_0)dx$$

$$dy = f'(x)dx = y'dx$$

$$\therefore dy = f'(x)dx. \longrightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x).$$

即函数的微分dy与自变量的微分dx之商等于该函数的导数. 导数也叫"微商".

注意

(1)一元函数的可导性与可微性是等价的.

(2)微分的两个特点是:

dy是Δx的线性函数,且$\Delta y - dy = o(\Delta x)$;

dy是Δy的主要部分,且$\Delta y - dy = o(\Delta y)$.

证明:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y - dy}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y - f'(x)\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(1 - \frac{f'(x)}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} \right) = 0$$

(3)用微分定义考虑函数是否可微时,关键看

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y - dy}{\Delta x} = 0$$是否成立.

4. 微分的几何意义

如图所示

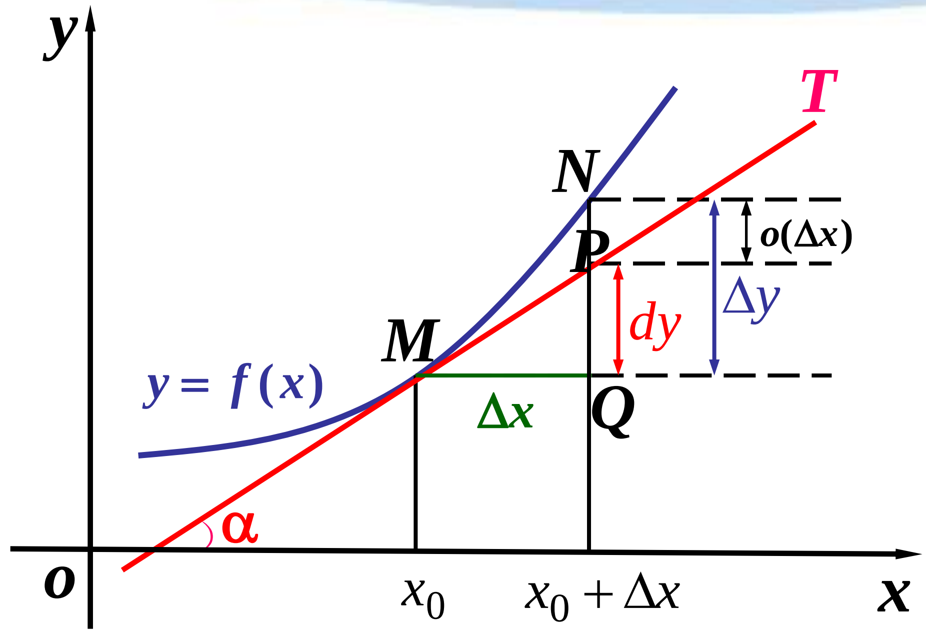
$MQ = \Delta x,\ \ NQ = \Delta y,$

$\tan\alpha = f'(x_0)$

$dy = f'(x_0)\Delta x$

$\quad = MQ \cdot \tan\alpha$

$\quad = PQ$



当Δy是曲线的纵坐标增量时，

dy就是切线纵坐标对应的增量.

当$|\Delta x|$很小时，在点M的附近，

切线段MP可近似代替曲线段MN.

二.微分运算法则

1. 基本初等函数的微分公式

$(1)\ d(C) = 0dx$

$(2)\ d(x^{\mu}) = \mu x^{\mu-1}dx$

$(3)\ d(\sin x) = \cos x dx$

$(4)\ d(\cos x) = -\sin x dx$

$(5)\ d(\tan x) = \sec^2 x dx$

$(6)\ d(\cot x) = -\csc^2 x dx$

$(7)\ d(\sec x) = \sec x \tan x dx$

$(8)\ d(\csc x) = -\csc x \cot x dx$

$(9)\ d(a^x) = a^x \ln a dx$

$(10)\ d(e^x) = e^x dx$

$(11)\ d(\log_a x) = \frac{1}{x\ln a}dx$

$(12)\ d(\ln x) = \frac{1}{x}dx$

$(13)\ d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$(14)\ d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$(15)\ d(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}dx$

$(16)\ d(\operatorname{arc}\cot x) = -\frac{1}{1+x^2}dx$

2. 四则运算法则

定理3.

设u,v是可微函数,C为常数,则$u\pm v, u\cdot v, Cu, \dfrac{u}{v}$也可微,且

$$(1)\ d(u\pm v)=du\pm dv$$

$$(2)\ d(uv)=vdu+udv$$

$$(3)\ d(Cu)=Cdu$$

$$(4)\ d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}\qquad (v\neq 0)$$

3. 复合函数的微分法则

定理4. 设 (1) $u = g(x)$在x处可微,

(2) $y = f(u)$在相应点$u = g(x)$处可微,

则 $y = f[g(x)]$在x处可微, 且

$$dy = f'(u)g'(x)dx \quad 或 \quad d\{f[g(x)]\} = f'(u)g'(x)dx$$

注意: 当u为自变量时, 有 $dy = f'(u)du$

当u为中间变量时, 设$u = g(x)$, 则$dy = f'(u)\boxed{g'(x)dx}$

即$dy = f'(u)du$

无论u为中间变量还是自变量，都具有同一微分形式.

这种性质称为**一阶微分形式不变性**.

三.求微分的习例

例1.设 $y=\sin(2x+1)$, 求dy.

例2.设 $y=\ln(x+e^{x^2})$, 求dy.

例3.设 $y=e^{1-3x}\cos x$, 求dy.

例4.设$y=e^{\sin(ax+b)}+\ln(1+e^{x^2})$,求$dy$.

例5.设$y\sin x-\cos(x-y)=0$,求dy.

例6. 在下列括号中填入适当的函数使等式成立:

(1) $d(\quad)=\cos\omega t dt$;　　(2) $d(\sin x^2)=(\quad)d(\sqrt{x})$.

例1.设 $y=\sin(2x+1)$, 求dy.

解: $\because y=\sin u, u=2x+1.$

$$\therefore dy=\cos u du$$

$$=\cos(2x+1)d(2x+1)$$

$$=\cos(2x+1)\cdot 2dx$$

$$=2\cos(2x+1)dx.$$

例2.设 $y=\ln(x+e^{x^2})$, 求dy.

解: $\because y'=\dfrac{1+2xe^{x^2}}{x+e^{x^2}}$,

$$\therefore dy=\frac{1+2xe^{x^2}}{x+e^{x^2}}dx.$$

例3.设 $y=e^{1-3x}\cos x$, 求dy.

解: $dy=\cos x\cdot d(e^{1-3x})+e^{1-3x}\cdot d(\cos x)$

$\because (e^{1-3x})'=-3e^{1-3x},\quad (\cos x)'=-\sin x.$

$\therefore dy=\cos x\cdot(-3e^{1-3x})dx+e^{1-3x}\cdot(-\sin x)dx$

$=-e^{1-3x}(3\cos x+\sin x)dx.$

例4.设$y=e^{\sin(ax+b)}+\ln(1+e^{x^2})$,求$dy$.

解: $$dy=d[e^{\sin(ax+b)}]+d[\ln(1+e^{x^2})]$$

$$=e^{\sin(ax+b)}d[\sin(ax+b)]+\frac{1}{1+e^{x^2}}d(1+e^{x^2})$$

$$=e^{\sin(ax+b)}\cos(ax+b)d(ax+b)+\frac{1}{1+e^{x^2}}\cdot e^{x^2}dx^2$$

$$=e^{\sin(ax+b)}\cos(ax+b)\cdot adx+\frac{1}{1+e^{x^2}}\cdot e^{x^2}\cdot 2xdx$$

$$=\left[ae^{\sin(ax+b)}\cos(ax+b)+\frac{2xe^{x^2}}{1+e^{x^2}}\right]dx.$$

例5.设$y\sin x-\cos(x-y)=0$,求dy.

解: 利用一阶微分形式不变性,有

$$\mathrm{d}(y\sin x)-\mathrm{d}(\cos(x-y))=0$$

$$\sin x\,\mathrm{d}y+y\cos x\,\mathrm{d}x+\sin(x-y)(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)=0$$

$$\mathrm{d}y=\frac{y\cos x+\sin(x-y)}{\sin(x-y)-\sin x}\mathrm{d}x$$

例6. 在下列括号中填入适当的函数使等式成立:

(1) $d(\quad)=\cos\omega t dt$;　　(2) $d(\sin x^2)=(\quad)d(\sqrt{x})$.

解: (1) $\because d(\sin\omega t)=\omega\cos\omega t dt$,

$$\therefore \cos\omega t dt=\frac{1}{\omega}d(\sin\omega t)=d(\frac{1}{\omega}\sin\omega t);$$

$$\therefore d(\frac{1}{\omega}\sin\omega t+C)=\cos\omega t dt.$$

(2) $$\because \frac{d(\sin x^2)}{d(\sqrt{x})}=\frac{2x\cos x^2 dx}{\frac{1}{2\sqrt{x}}dx}=4x\sqrt{x}\cos x^2,$$

$$\therefore d(\sin x^2)=(4x\sqrt{x}\cos x^2)d(\sqrt{x}).$$

说明: 上述微分的反问题是不定积分要研究的内容.

注意: 数学中的反问题往往出现多值性.

四、微分在近似计算中的应用

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

当 $|\Delta x|$ 很小时，得近似等式:

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$$

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

令 $x = x_0 + \Delta x$

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

使用原则: 1) $f(x_0), f'(x_0)$ 好算;

2) x 与 x_0 靠近.

特别当 $x_0=0$, $|x|$ 很小时,

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)x$$

常用近似公式: ($|x|$ 很小)

(1) $(1+x)^{\alpha}\approx 1+\alpha x$

证明: 令 $f(x)=(1+x)^{\alpha}$

得 $f(0)=1,\quad f'(0)=\alpha$

$\therefore$ 当 $|x|$ 很小时, $(1+x)^{\alpha}\approx 1+\alpha x$

(2) $\sin x\approx x$

(3) $e^{x}\approx 1+x$

(4) $\tan x\approx x$

(5) $\ln(1+x)\approx x$

例11. 求 $\sin 29^\circ$ 的近似值 .

解: 设 $f(x) = \sin x$,

取 $x_0 = 30^\circ = \dfrac{\pi}{6}$,　$x = 29^\circ = \dfrac{29}{180}\pi$

则 $\mathrm{d}x = -\dfrac{\pi}{180}$

$$\sin 29^\circ = \sin \frac{29}{180}\pi \approx \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6}\cdot\left(-\frac{\pi}{180}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(-0.0175)$$

$$\approx 0.485$$

$$\boxed{\sin 29^\circ \approx 0.4848\cdots}$$

例12. 计算 $\sqrt[5]{245}$ 的近似值 .

解: $\sqrt[5]{245}=(243+2)^{\frac{1}{5}}$ $\quad 3^5=243$

$=3(1+\frac{2}{243})^{\frac{1}{5}}$ $\quad \boxed{(1+x)^{\alpha}\approx 1+\alpha x}$

$\approx 3(1+\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{243})$

$=3.0048$

例13. 有一批半径为1cm 的球,为了提高球面的光洁度,要镀上一层铜 ,厚度定为 0.01cm ,估计一下,每只球需用铜多少克. (铜的密度 : $8.9\,\mathrm{g}/\mathrm{cm}^3$)

解: 已知球体体积为 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$

镀铜体积为 V 在 $R=1, \Delta R=0.01$ 时体积的增量 ΔV,

$$\Delta V \approx \mathrm{d}V \Big|_{\substack{R=1 \\ \Delta R=0.01}} = 4\pi R^2 \Delta R \Big|_{\substack{R=1 \\ \Delta R=0.01}}$$

$$\approx 0.13\,(\mathrm{cm}^3)$$

因此每只球需用铜约为

$$8.9\times 0.13=1.16\ (\mathrm{g})$$

五、微分在估计误差中的应用

某量的精确值为 A，其近似值为 a，

$|A-a|$ 称为a 的**绝对误差**

$\dfrac{|A-a|}{|a|}$ 称为a 的**相对误差**

若 $|A-a| \le \delta_A$

δ_A 称为测量 A 的**绝对误差限**

$\dfrac{\delta_A}{|a|}$ 称为测量 A 的**相对误差限**

误差传递公式：

若直接测量某量得 x，已知测量误差限为 δ_x，

按公式 $y=f(x)$ 计算 y 值时的误差

$$|\Delta y| \approx |\mathrm{d}y| = |f'(x)| \cdot |\Delta x|$$

$$\leq |f'(x)| \cdot \delta_x$$

故 y 的绝对误差限约为 $\delta_y \approx |f'(x)| \cdot \delta_x$

相对误差限约为 $\dfrac{\delta_y}{|y|} \approx \left|\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right| \cdot \delta_x$

例14. 设测得圆钢截面的直径 $D = 60.0$ mm, 测量D 的绝对误差限 $\delta_D = 0.05$ mm, 欲利用公式 $A = \frac{\pi}{4} D^2$ 计算圆钢截面积,试估计面积的误差.

解: 计算 A 的绝对误差限约为

$$\delta_A = |A'| \cdot \delta_D = \frac{\pi}{2} D \cdot \delta_D = \frac{\pi}{2} \times 60.0 \times 0.05$$

$$\approx 4.715 \quad \text{(mm)}$$

A 的相对误差限约为

$$\frac{\delta_A}{|A|} = \frac{\frac{\pi}{2} D \delta_D}{\frac{\pi}{4} D^2} = 2\frac{\delta_D}{D} = 2 \times \frac{0.05}{60.0} = 0.17\ \%$$

内容小结

1. 微分概念

- 微分的定义及几何意义
- 可导 $\rightleftarrows$ 可微

2. 微分运算法则

微分形式不变性：$\mathrm{d} f(u)=f'(u)\,\mathrm{d} u$

(u 是自变量或中间变量)

3. 微分的应用

$$\text{微分的应用}\begin{cases}\text{近似计算}\\ \text{估计误差}\end{cases}$$

思考题：习题2.1 第1题（15）

思考题参考答案

课堂练习：

习题2.1第33题（5）到（7） 第37题到第38题

练习参考答案

习题课

关系 $\frac{dy}{dx} = y' \Leftrightarrow dy = y'dx \Leftrightarrow \Delta y = dy + o(\Delta x)$

导　数

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

基本公式

高阶导数

高阶微分

微　分

$dy = y'\Delta x$

求　导　法　则

内容小结

一. 定义

1. 一阶导数的定义

2. 高阶导数的定义

3. 微分的定义

二. 基本公式

1. 基本初等函数的导数公式

2. 高阶导数公式

3.基本初等函数的微分公式

三. 求导法则

1. 函数的和、差、积、商的求导法则;

2. 反函数的求导法则;

3. 复合函数的求导法则;

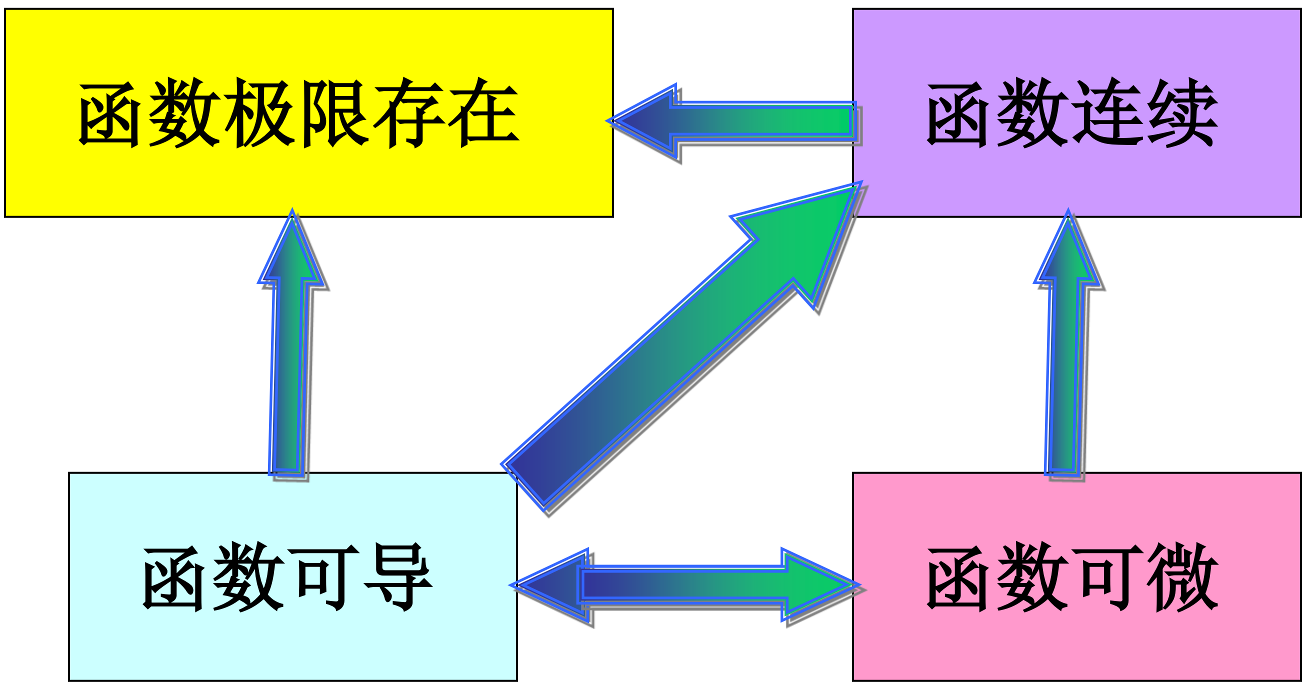
4. 隐函数求导法则;

5. 对数求导法;

6. 参变量函数的求导法则;

7. 分段函数的求导法;

四. 函数极限存在、函数连续、函数可导、函数可微的关系



五. 常见题型

1. 求导数

用定义求导数

复合函数求导数

分段函数的导数

表达式中含有绝对值或最值的函数的导数

参变量函数的导数

隐函数的导数

表达式中含有幂指函数的导数

求高阶导数

2. 求微分

3. 函数连续性与可导性的讨论

4. 利用导数定义证明结论成立

5. 求待定参数

6. 求曲线的切线与法线

典型习题

例1 确定a,b的值,使函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}(1-\cos ax), & x<0\\ 0, & x=0\\ \dfrac{1}{x}\ln(b+x^2), & x>0\end{cases}$

在$(-\infty,+\infty)$内处处连续.

例2 设函数$\varphi(x)$在$x=a$处连续,$f(x)=(x-a)\varphi(x)$,

(1)证明函数$f(x)$在$x=a$处可导;

(2)若$g(x)=|x-a|\varphi(x)$,函数$g(x)$在$x=a$处可导吗?

例3 用导数定义证明: 奇函数的导数是偶函数.

例4 设$\varphi(x)$是二阶可导函数,选择a,b,c使函数

$$f(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\le x_0\\ a(x-x_0)^2+b(x-x_0)+c, & x>x_0\end{cases}$$

在$(-\infty,+\infty)$上二阶可导.

例5 设$f(x)$在$x=0$处可导,若$g(x)=\begin{cases}x^2\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$

求$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(g(x))]_{x=0}$.

例6 已知$f(x)=\begin{cases} x(\cos x)^{x^{-2}}, & x>0, \\ ax+b, & x\le 0 \end{cases}$处处连续可导,

求a,b的值.

例7 设$f(x)$有一阶导数, $f(0)=f'(0)=1$,

求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin x)-1}{\ln f(x)}$.

例8 设$y=\dfrac{e^{-x^2}\arcsin(e^{-x^2})}{\sqrt{1-e^{-2x^2}}}+\dfrac{1}{2}\ln(1-e^{-2x^2})$,求$y'$.

求a,b的值.

例9 求由参数方程$x=3t^2+2t+3, e^y\sin t-y+1=0$所确定的函数$y=y(x)$的微分$dy$.

例10 设$y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$,求$y^{(n)}$.

例11 已知$f(x)$是周期为5连续函数,它在$x=0$的某个邻域内满足关系式

$$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+o(x),$$

且$f(x)$在$x=1$处可导,求曲线$y=f(x)$在点$(6, f(6))$处的切线方程.

例1 确定a,b的值,使函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}(1-\cos ax), & x<0\\ 0, & x=0\\ \dfrac{1}{x}\ln(b+x^2), & x>0\end{cases}$

在$(-\infty,+\infty)$内处处连续.

解 $\because f(0)=0,$

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1-\cos ax}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{(ax)^2}{2}}{x}=0,$$

$$f(0+0)=\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(b+x^2)}{x}$$

由可导必连续,有：$f(0-0)=f(0+0)=f(0)$,

从而, $\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(b+x^2)}{x}=0, \quad \Rightarrow b=1.$

又$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{1}{x}(1-\cos ax)-0}{x}$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{1-\cos ax}{x^2}=\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{(ax)^2}{2}}{x^2}=\frac{a^2}{2},$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}\ln(1+x^2)-0}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}=1,$$

由可导,有 : $f'_-(0)=f'_+(0),\ \Rightarrow \frac{a^2}{2}=1,\ \Rightarrow a=\pm\sqrt{2}.$

例2 设函数$\varphi(x)$在$x=a$处连续, $f(x)=(x-a)\varphi(x)$,

(1)证明函数$f(x)$在$x=a$处可导;

(2)若$g(x)=|x-a|\varphi(x)$,函数$g(x)$在$x=a$处可导吗?

解 (1) $$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)\varphi(x)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\varphi(x)=\varphi(a).$$

$\therefore f(x)$在$x=a$处可导.

$$(2)g'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^-}\frac{|x-a|\varphi(x)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a^-}-\varphi(x)=-\varphi(a),$$

$$g'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{|x-a|\varphi(x)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a^+}\varphi(x)=\varphi(a),$$

$\therefore$ 当$\varphi(a)=0$时,$g(x)$在$x=a$处可导,且$g'(a)=0.$

当$\varphi(a)\neq 0$时,$g(x)$在$x=a$处不可导.

例3 用导数定义证明:奇函数的导数是偶函数.

证 $\because f(-x)=-f(x)$,

$$\therefore f'(-x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x+\Delta x)-f(-x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f[-(x-\Delta x)]-f(-x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-f(x-\Delta x)+f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{-\Delta x}=f'(x).$$

例4 设$\varphi(x)$是二阶可导函数,选择a,b,c使函数

$$f(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\le x_0\\ a(x-x_0)^2+b(x-x_0)+c, & x>x_0\end{cases}$$

在$(-\infty,+\infty)$上二阶可导.

解 $\because f(x_0)=\varphi(x_0)$,

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x_0)$$

$$f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0}[a(x-x_0)^2+b(x-x_0)+c]=c$$

由$f(x_0+0)=f(x_0-0)=f(x_0)$得,$c=\varphi(x_0)$

又$f'_-(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x\to x_0^-} \dfrac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \varphi'(x_0)$

$$f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x\to x_0^+} \frac{a(x - x_0)^2 + b(x - x_0) + c - \varphi(x_0)}{x - x_0} = b$$

由$f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$得,$b = \varphi'(x_0)$

$$\therefore\ f'(x) = \begin{cases} \varphi'(x), & x < x_0 \\ \varphi'(x_0), & x = x_0 \\ 2a(x - x_0) + b, & x > x_0 \end{cases}$$

$$f''_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{\varphi'(x)-\varphi'(x_0)}{x-x_0}=\varphi''(x_0)$$

$$f''_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0^+}\frac{2a(x-x_0)+b-\varphi'(x_0)}{x-x_0}=2a$$

由$f''_+(x_0)=f''_-(x_0)$得,$a=\dfrac{1}{2}\varphi''(x_0)$

例5 设$f(x)$在$x=0$处可导,若$g(x)=\begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$

求$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(g(x))]_{x=0}$.

解 $\because g'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}-0}{x}=0,$

$\therefore \frac{d}{dx}\{f[g(x)]\}\big|_{x=0}=f'[g(0)]\cdot g'(0)=0.$

例6 已知$f(x)=\begin{cases} x(\cos x)^{x^{-2}}, & x>0, \\ ax+b, & x\le 0 \end{cases}$处处连续可导,

求a,b的值.

解 $\because \lim\limits_{x\to 0^+}(\cos x)^{x^{-2}} = \lim\limits_{x\to 0^+}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln\cos x}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}$,

而$f(0)=b$,

$f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+} x(\cos x)^{x^{-2}} = \lim\limits_{x\to 0^+} x\cdot \lim\limits_{x\to 0^+}(\cos x)^{x^{-2}} = 0$,

$f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-}(ax+b)=b$,

由$f(x)$连续有,$f(0+0)=f(0-0)=f(0)$, $\therefore b=0$;

$$又 f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x(\cos x)^{x^{-2}}-0}{x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}(\cos x)^{x^{-2}}=e^{-\frac{1}{2}},$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{ax-0}{x}=a,$$

由$f(x)$可导有, $f'_+(0)=f'_-(0)$,

$$\therefore a=e^{-\frac{1}{2}}.$$

例7 设$f(x)$有一阶导数, $f(0)=f'(0)=1$,求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin x)-1}{\ln f(x)}$.

解 $\because f(0)=f'(0)=1,$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f(\sin x)-1}{\ln f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin x)-1}{\ln\{1+[f(x)-1]\}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin x)-1}{f(x)-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{f(\sin x)-f(0)}{\sin x}}{\dfrac{f(x)-f(0)}{x}}\cdot\frac{\sin x}{x}$$

$$=\frac{f'(0)}{f'(0)}\cdot 1=1$$

例8 设$y=\dfrac{e^{-x^2}\arcsin(e^{-x^2})}{\sqrt{1-e^{-2x^2}}}+\dfrac{1}{2}\ln(1-e^{-2x^2})$,求$y'$.

求a,b的值.

解 令$u=e^{-x^2}$, 则$y=\dfrac{u\arcsin u}{\sqrt{1-u^2}}+\dfrac{1}{2}\ln(1-u^2)$,

由于$\dfrac{dy}{du}=\dfrac{\arcsin u}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{\arcsin e^{-x^2}}{(1-e^{-2x^2})^{\frac{3}{2}}}$, $\dfrac{du}{dx}=-2xe^{-x^2}$,

所以$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}=-\dfrac{2xe^{-x^2}\arcsin e^{-x^2}}{(1-e^{-2x^2})^{\frac{3}{2}}}$.

例9 求由参数方程$x=3t^2+2t+3, e^y\sin t-y+1=0$所确定的函数$y=y(x)$的微分$dy$.

解 利用一阶微分形式不变性，有

$$\begin{cases} dx=6tdt+2dt \\ e^y dy\sin t+e^y\cos tdt-dy=0 \end{cases}$$

从而
$$\begin{cases} dt=\dfrac{1}{6t+2}dx \\ dy=\dfrac{e^y\cos t}{1-e^y\sin t}dt \end{cases}\qquad \therefore dy=\frac{e^y\cos t}{(1-e^y\sin t)(6t+2)}dx.$$

例10 设$y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$,求$y^{(n)}$.

解 $\because\ y=(1+x)^{\frac{2}{3}}-(1+x)^{-\frac{1}{3}}$

$$\therefore\ y^{(n)}=[(1+x)^{\frac{2}{3}}]^{(n)}-[(1+x)^{-\frac{1}{3}}]^{(n)}$$

$$=\frac{2}{3}(\frac{2}{3}-1)(\frac{2}{3}-2)\cdots(\frac{2}{3}-n+1)(1+x)^{\frac{2}{3}-n}$$

$$-(-\frac{1}{3})(-\frac{1}{3}-1)(-\frac{1}{3}-2)\cdots(-\frac{1}{3}-n+1)(1+x)^{-\frac{1}{3}-n}$$

$$= \frac{2}{3}(-\frac{1}{3})(-\frac{4}{3})\cdots(-\frac{3n-5}{3})(1+x)^{\frac{2}{3}-n}$$

$$-(-\frac{1}{3})(-\frac{4}{3})\cdots(-\frac{3n-2}{3})(1+x)^{-\frac{1}{3}-n}$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-5)(3n+2x)}{3^n(1+x)^{\frac{1}{3}+n}}$$

例11 已知$f(x)$是周期为5连续函数,它在$x=0$的某个邻域内满足关系式

$$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+o(x),$$

且$f(x)$在$x=1$处可导,求曲线$y=f(x)$在点$(6,f(6))$处的切线方程.

解 $\because f(x+5)=f(x), \quad \therefore f(6)=f(1),$

又$f'(x+5)=f'(x), \quad \therefore f'(6)=f'(1).$

$$\because f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+o(x),$$

$$\lim_{x\to 0}[f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)]=\lim_{x\to 0}[8x+o(x)]$$

$$-2f(1)=0 \Rightarrow f(1)=0$$

又 $$\frac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{\sin x}=\frac{8x+o(x)}{\sin x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{8x+o(x)}{\sin x}$$

$$\therefore 4f'(1)=8 \Rightarrow f'(1)=2.$$

$\therefore$ 切线方程为 $y=2(x-6)$.