高等数学A

第3章 一元函数积分学

3.3 定积分的应用

3.3.1 平面图形的面积
3.3.2 体积(1)

中南大学开放式精品示范课堂高等数学建设组

3.3 定积分的应用

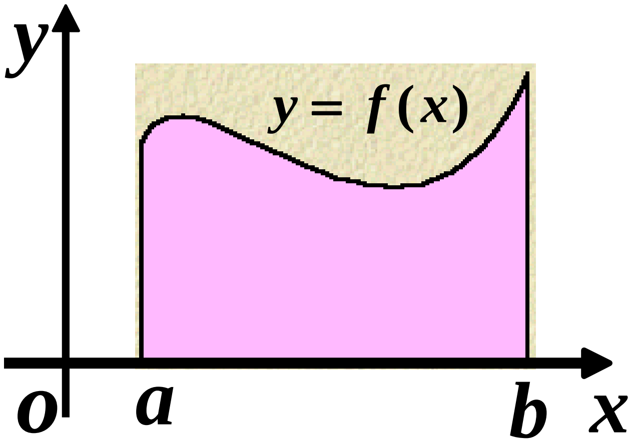
定积分的几何应用

- 问题的提出与微元法
- 3.3.1 平面图形的面积
  - 直角坐标情形
  - 计算平面图形面积习例1-3
  - 参数方程情形　习例4-6
  - 极坐标情形
  - 计算平面图形面积习例7-10
- 3.3.2 立体体积
  - 旋转体的体积
  - 计算立体体积习例8-11
- 内容小结

一、问题的提出与微元法

回顾　曲边梯形求面积的问题

曲边梯形由连续曲线 $y = f(x)(f(x) \geq 0)$、x轴与两条直线$x = a$、$x = b$所围成。



$$A = \int_a^b f(x)dx$$

运用定积分处理问题时要求量 A 具有对区间的可加性.

按照定积分的概念, 采用

"分划—近似—求和—取极限"

的步骤将整体问题化成局部问题, 利用整体上变化的量在局部上近似于不变的辩证关系, 在局部上以"不变"代替"变", 便有关系式 $A=\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

为简便和醒目起见，略去下标 i，将具有代表性的第 i 个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 表示为 $[x, x+\mathrm{d}x]$，称之为典型小区间，且取 ξ_i 为区间的左端点 x，则有

$$\Delta A \approx f(x)\,\mathrm{d}x.$$

通常称 $f(x)\,\mathrm{d}x$ 为量 A 的微分元素(或积分元素)，记为

$$\mathrm{d}A = f(x)\,\mathrm{d}x.$$

由量 A 对区间的可加性，取极限过程 $\mathrm{d}x \to 0$（相当于 $\|\Delta x\| \to 0$），将微分元素 $\mathrm{d}A$ 在区间 $[a, b]$ 上“无限累加”起来(即作定积分)就得到量 A 在区间 $[a, b]$ 上的值：

$$A = \int_a^b \mathrm{d}A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

简言之，我们在这里将定积分理解为微分元素的无限累加.

元素法的一般步骤:

第一步 利用“化整为零 , 以常代变” 求出局部量的

近似值 ——— 微分表达式

$$\mathrm{d}U = f(x)\,\mathrm{d}x$$

第二步 利用“ 积零为整 , 无限累加 ” 求出整体量的

精确值 ——— 积分表达式

$$U = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

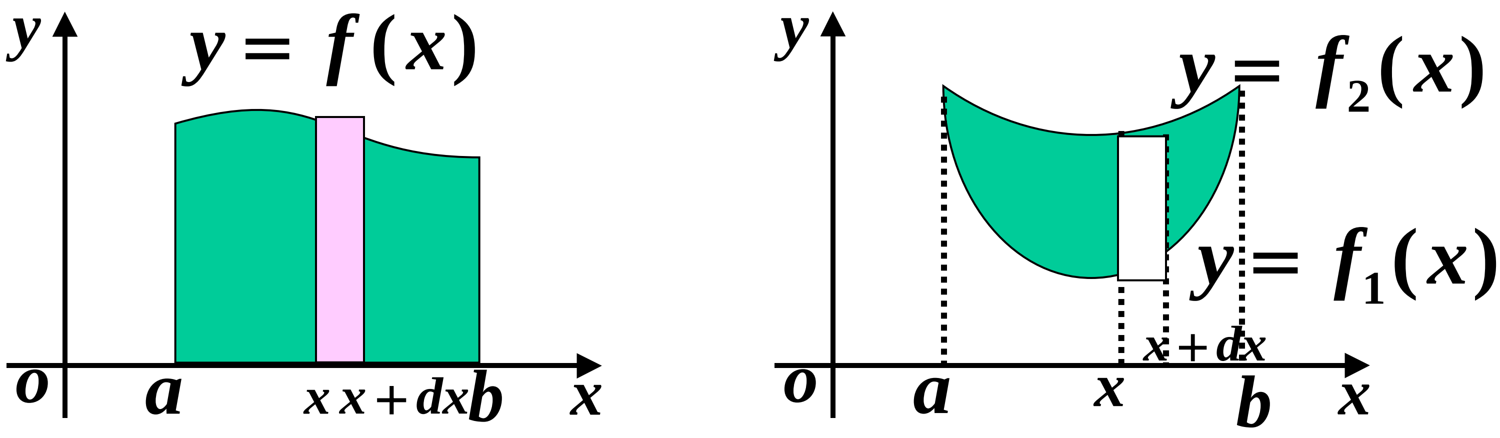
这种分析方法成为**元素法** (或**微元分析法**)

元素的几何形状常取为: 条, 带, 段, 环, 扇, 片, 壳 等

应用方向：平面图形的面积、 体积、平面曲线的弧长、 功、水压力、引力和平均值等。

二、平面图形的面积

1. 直角坐标情形



曲边梯形的面积

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

围成图形的面积

$$A = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$$

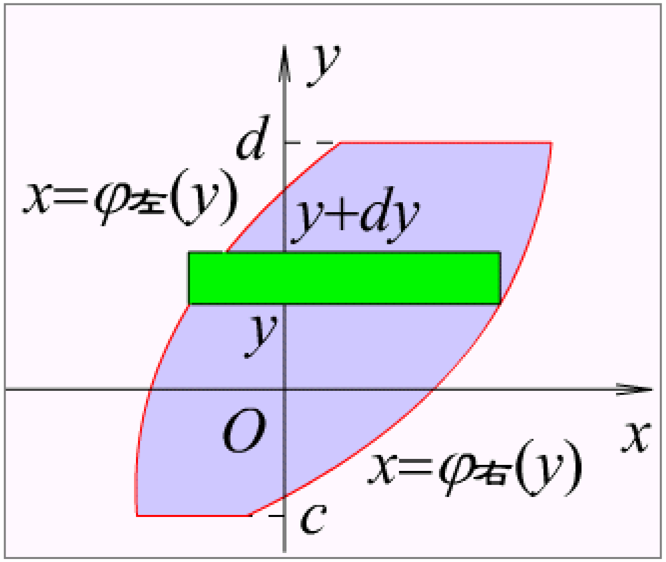
说明：注意各积分区间上被积函数的形式.

问题： 积分变量只能选 x 吗？

$$\phi_1(y), \phi_2(y) \in C[c,d], \phi_1(y) \le \phi_2(y)$$

$$dA = [\varphi_2(y) - \varphi_1(y)]dy$$

$$A = \int_c^d [\varphi_2(y) - \varphi_1(y)]dy$$



计算平面图形面积习例

例 1 计算由两条抛物线 $y^2 = x$ 和 $y = x^2$ 所围成的图形的面积.

例2 计算由曲线 $y^2 = 2x$ 和直线 $y = x - 4$ 所围成的图形的面积.

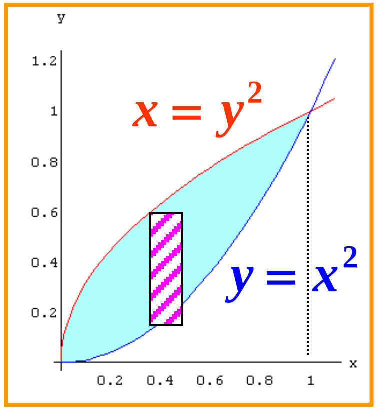
例3 计算由曲线 $y = x^3 - 6x$ 和 $y = x^2$ 所围成的图形的面积.

例4 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的面积.

例5 求星形线 $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $0 \le t \le 2\pi$ 所围成的平面图形的面积.

例6 求由摆线 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ 的第一拱 $(0 \le t \le 2\pi)$ 与横轴 x 所围成的平面图形的面积.

例 1 计算由两条抛物线$y^2 = x$和$y = x^2$所围成的图形的面积.



解 两曲线的交点

$$(0,0) \quad (1,1)$$

选 x 为积分变量 $x \in [0,1]$

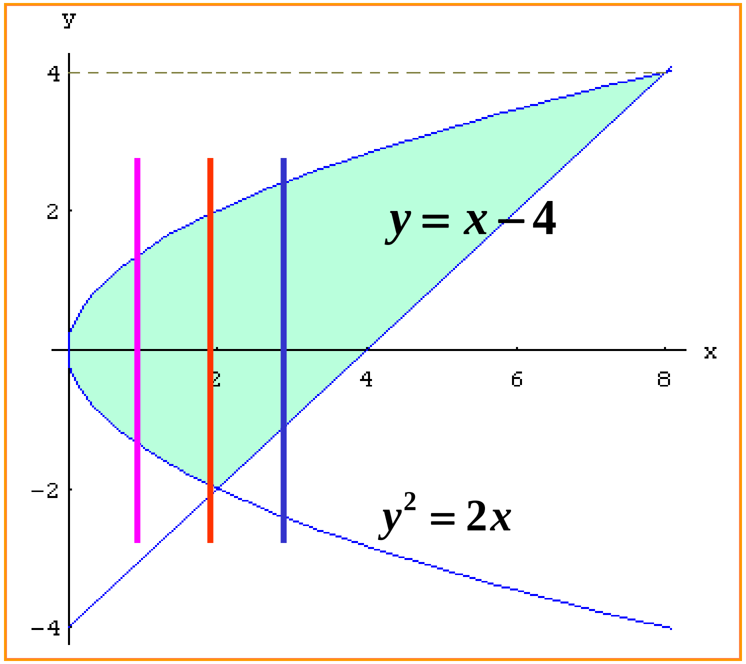
面积元素 $dA = (\sqrt{x} - x^2)dx$

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

例2 计算由曲线$y^2=2x$和直线$y=x-4$所围成的图形的面积.

解 两曲线的交点

$$\begin{cases} y^2=2x \\ y=x-4 \end{cases} \Rightarrow (2,-2),\ (8,4).$$

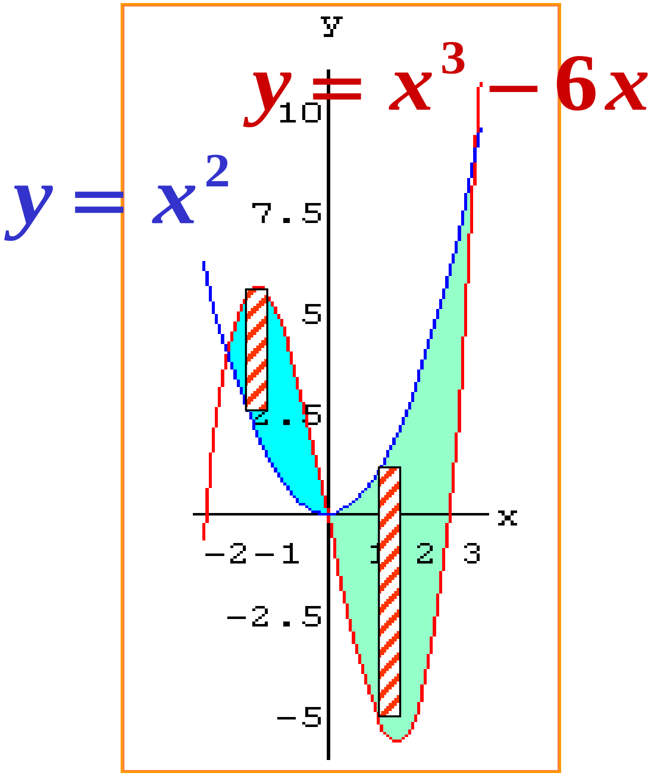


选y为积分变量 $y\in[-2,4]$

$\forall[y,y+dy]\subset[-2,4]$,

$$dA=\left(y+4-\frac{y^2}{2}\right)dy,\quad \therefore A=\int_{-2}^{4}\left(y+4-\frac{y^2}{2}\right)dy=18.$$

例3 计算由曲线 $y=x^3-6x$ 和 $y=x^2$ 所围成的图形的面积.



解 两曲线的交点

$$\begin{cases} y=x^3-6x \\ y=x^2 \end{cases} \Rightarrow (0,0),\quad (-2,4),\quad (3,9).$$

选x为积分变量，$x\in[-2,3]$

$$x\in[-2,0],\quad dA_1=(x^3-6x-x^2)dx$$

$$x\in[0,3],\quad dA_2=(x^2-x^3+6x)dx$$

$$A=\int_{-2}^{0}(x^3-6x-x^2)dx+\int_{0}^{3}(x^2-x^3+6x)dx=\frac{253}{12}.$$

归纳

求由曲线围成的平面图形面积的解题步骤：

（1）画草图，求出曲线的交点坐标

（2）根据图形特点，选取适当的积分变量

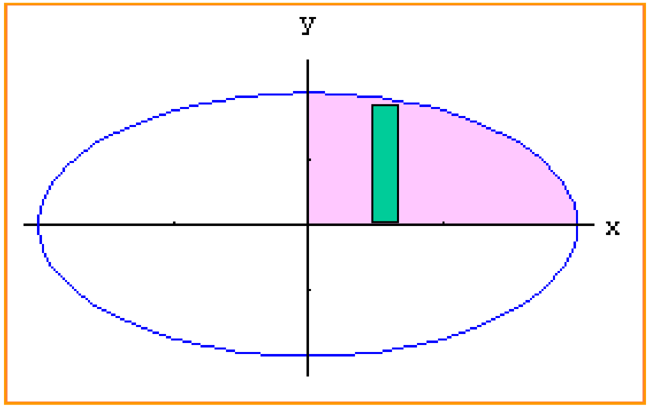
（3）写出面积微元 (根据平面图形,应使图形的分块尽量少,且被积表达式尽量简单)

（注y型：把x写成y的函数)

（4）写出面积的定积分表达式

（5）计算定积分，求出面积

例4 求椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$的面积.



解 椭圆的参数方程 $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$

由对称性知总面积等于4倍第一象限部分面积.

$$A = 4\int_0^a y\,dx = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t\,d(a\cos t)$$

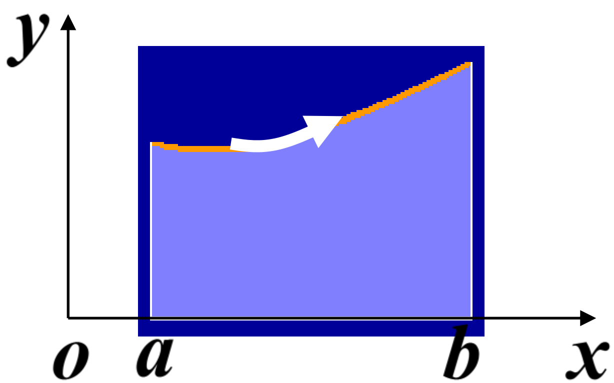
$$= 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt = \pi ab.$$

2. 参数方程情形

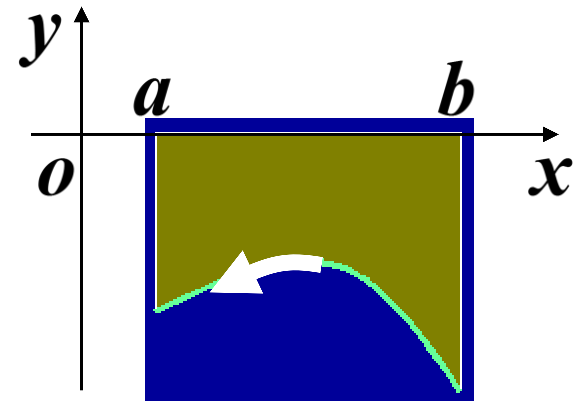
$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

此时要注意曲边是有正方向的! 从而确定出起点和终点.

当你沿曲边朝着这方向前进时曲边梯形将在你的右边.



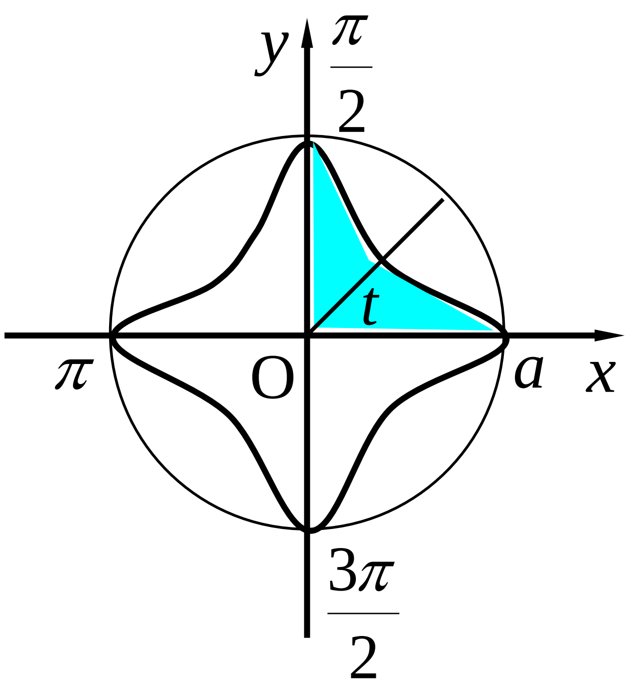
$(t_1$ 对应 $x = a)$



$(t_1$ 对应 $x = b)$

则曲边梯形面积 $A = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$

例5 求星形线 $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ 0 \le t \le 2\pi$ 所围成的平面图形的面积.



解 由对称性，只需求出第一象限中的面积 A_1，然后乘以4即可.

所求面积

$$A = 4A_1 = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (-3a^2 \sin^4 t \cos^2 t)\,\mathrm{d}t$$

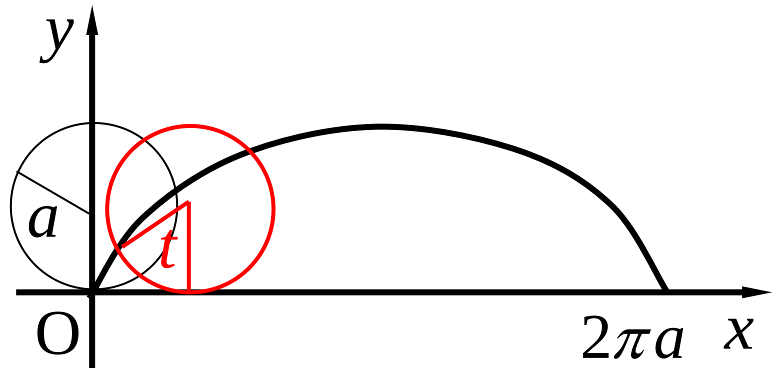
$$= 12a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t)\sin^4 t\,\mathrm{d}t = \cdots = \frac{3}{8}\pi a^2.$$

例6 求由摆线 $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$ 的第一拱 $(0\le t\le 2\pi)$ 与横轴 x 所围成的平面图形的面积.

解

(1) 求积分区间

$x:\ 0\to 2\pi a$ 时, $t:\ 0\to 2\pi$.



(2) 求微分元素

$$\mathrm{d}A=|y|\,\mathrm{d}x=a(1-\cos t)\,\mathrm{d}(a(t-\sin t))$$

$$=a^2(1-\cos t)^2\,\mathrm{d}t.$$

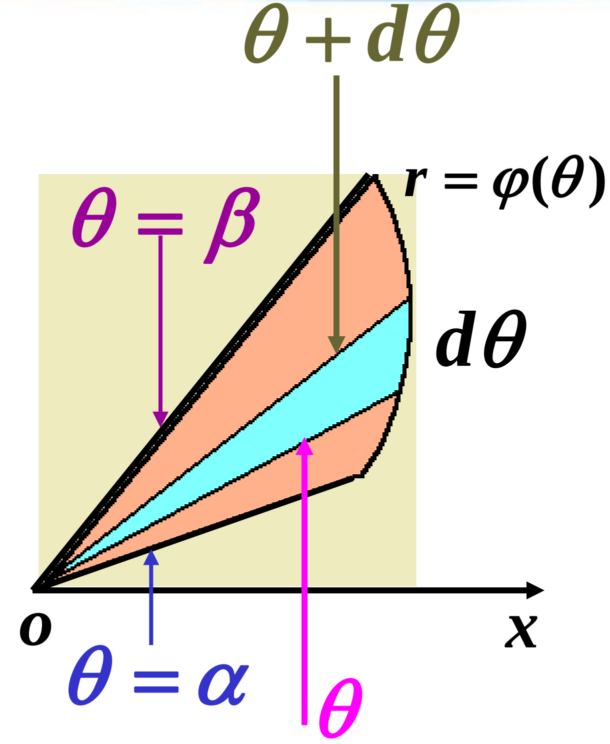
(3) 计算面积

$$A=\int_0^{2\pi a}|y|\,\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\,\mathrm{d}t$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)\,\mathrm{d}t=\cdots=3\pi a^2.$$

3. 极坐标情形

设由曲线$r=\varphi(\theta)$及射线$\theta=\alpha$、$\theta=\beta$围成一曲边扇形，求其面积．这里，$\varphi(\theta)$在$[\alpha,\beta]$上连续，且$\varphi(\theta)\geq 0$.



选θ为积分变量,且$\alpha\leq\theta\leq\beta$.

面积元素 $dA=\dfrac{1}{2}[\varphi(\theta)]^2d\theta$

曲边扇形的面积 $A=\int_\alpha^\beta\dfrac{1}{2}[\varphi(\theta)]^2d\theta=\int_\alpha^\beta\dfrac{1}{2}r^2d\theta.$

计算平面图形面积习例

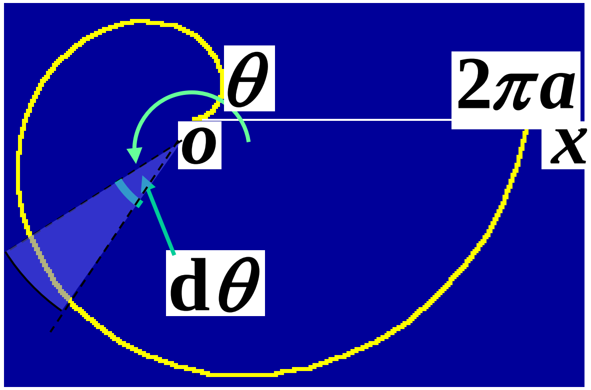
例7 计算阿基米德螺线 $r = a\theta \ (a > 0)$ 对应 θ 从 0 变到 2π 所围图形面积 .

例8 求双纽线$r^2 = a^2\cos 2\theta$所围平面图形的面积.

例9 求心形线$r = a(1+\cos\theta)$所围平面图形的面积$(a > 0)$.

例10 圆$r = 3\cos\theta$与心形线$r = 1+\cos\theta$所围成的平面图形的面积.

例7. 计算阿基米德螺线 $r = a\theta \ (a>0)$ 对应 θ 从 0 变到 2π 所围图形面积 .



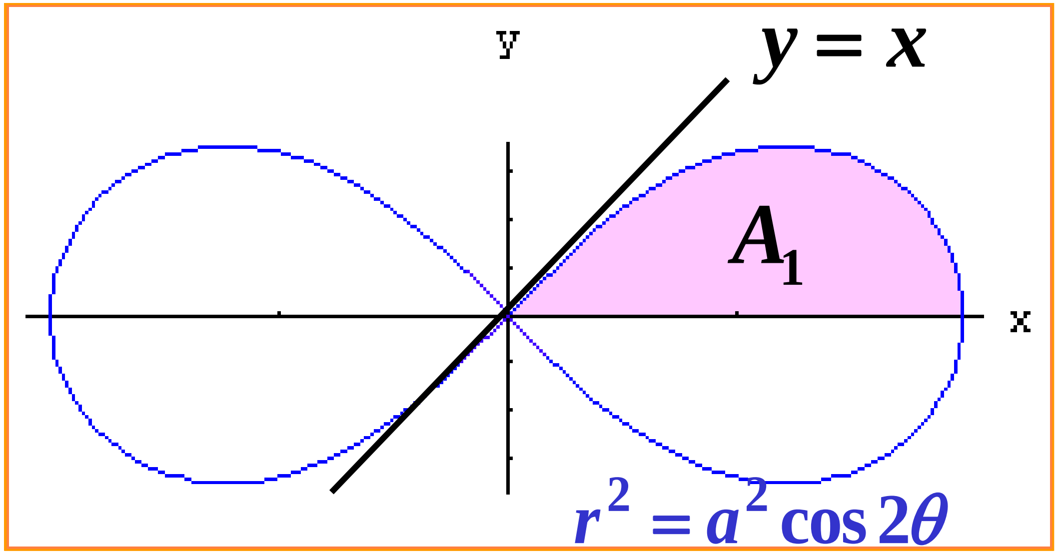
解: $$A=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(a\theta)^2\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\left[\frac{1}{3}\theta^3\right]_0^{2\pi}$$

$$=\frac{4}{3}\pi^3a^2$$

例8 求双纽线$r^2 = a^2\cos 2\theta$所围平面图形的面积.

解

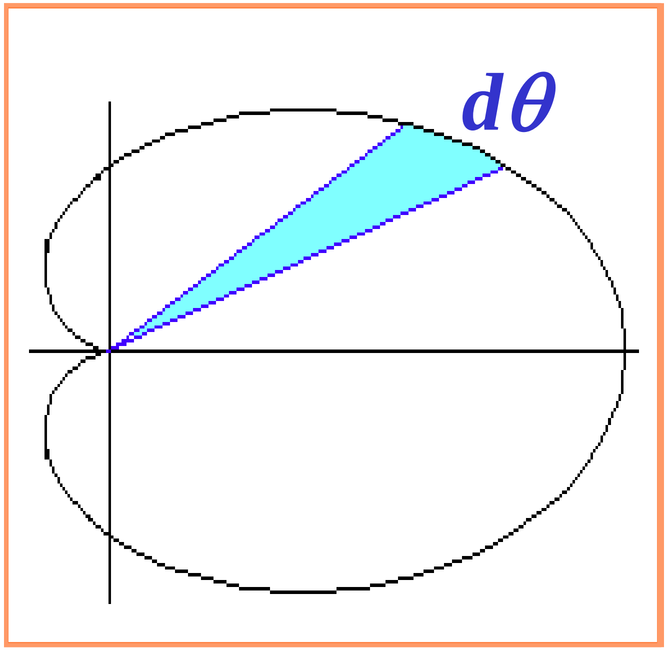


由对称性知总面积=4倍第一象限部分面积

$$A = 4A_1 \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4},$$

$$A = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} r^2 d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} a^2 \cos 2\theta d\theta = a^2.$$

例9 求心形线$r=a(1+\cos\theta)$所围平面图形的面积$(a>0)$.



解 $0\le\theta\le\pi$，利用对称性知

$$A=2\cdot\int_0^{\pi}\frac{1}{2}r^2d\theta$$

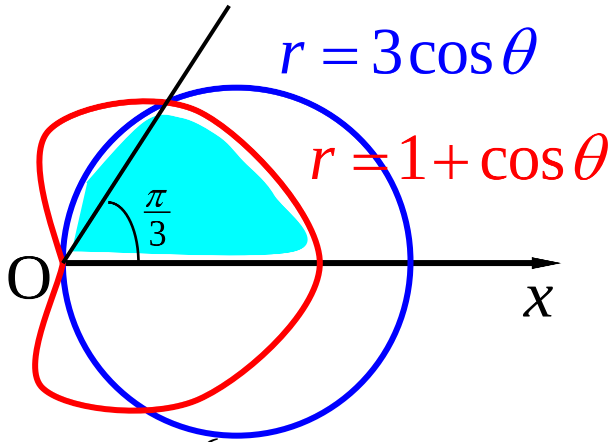
$$=2\cdot\int_0^{\pi}\frac{1}{2}a^2(1+\cos\theta)^2d\theta$$

$$=a^2\int_0^{\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta$$

$$=a^2\left[\frac{3}{2}\theta+2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\pi}=\frac{3}{2}\pi a^2.$$

例10 求圆 $r=3\cos\theta$ 与心形线 $r=1+\cos\theta$ 所围成的平面图形的面积.

解 由对称性, 求出上半部分的面积 A_1, 则 $A=2A_1$.



(1) 求积分区间 联立方程组

$$\begin{cases} r=3\cos\theta \\ r=1+\cos\theta \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \cos\theta=\frac{1}{2} \Longrightarrow \theta=\frac{\pi}{3}$$

$$A=2A_1=2\left\{\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}(1+\cos\theta)^2\,\mathrm{d}\theta+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(3\cos\theta)^2\,\mathrm{d}\theta\right\}$$

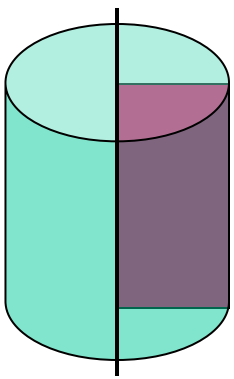
$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+2\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2})\,\mathrm{d}\theta+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{9(1+\cos 2\theta)}{2}\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\cdots=\frac{5\pi}{4}$$

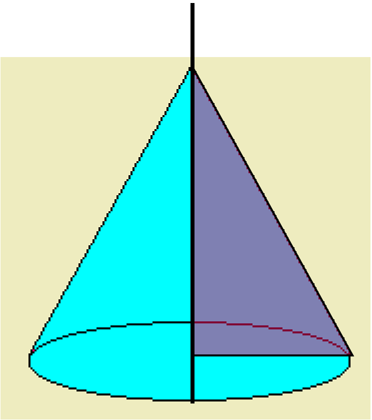
三、立体体积

旋转体的体积

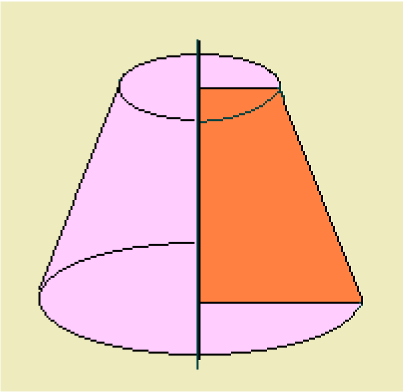
旋转体就是由一个平面图形绕这平面内一条直线旋转一周而成的立体．这直线叫做**旋转轴**．



圆柱



圆锥

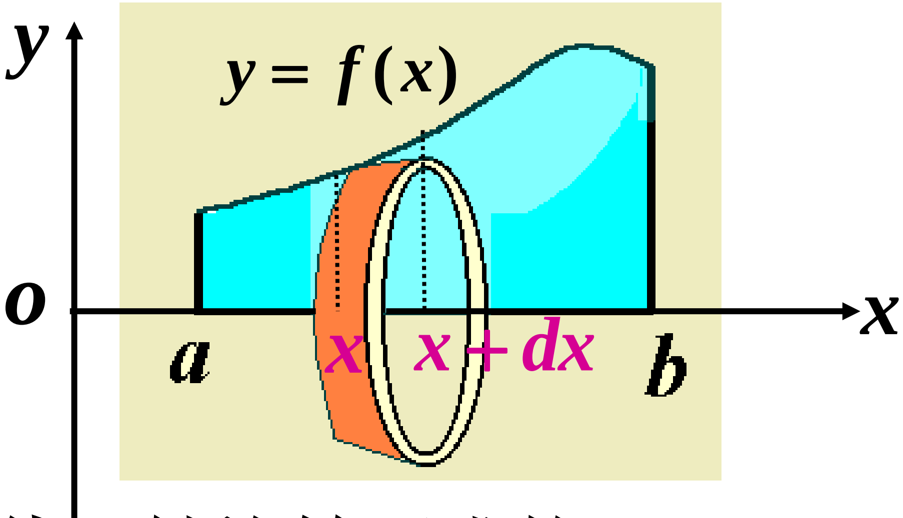


圆台

一般地，如果旋转体是由连续曲线$y = f(x)$、直线$x = a$、$x = b$及x轴所围成的曲边梯形绕x轴旋转一周而成的立体，体积为多少？

取积分变量为x，

$x \in [a,b]$



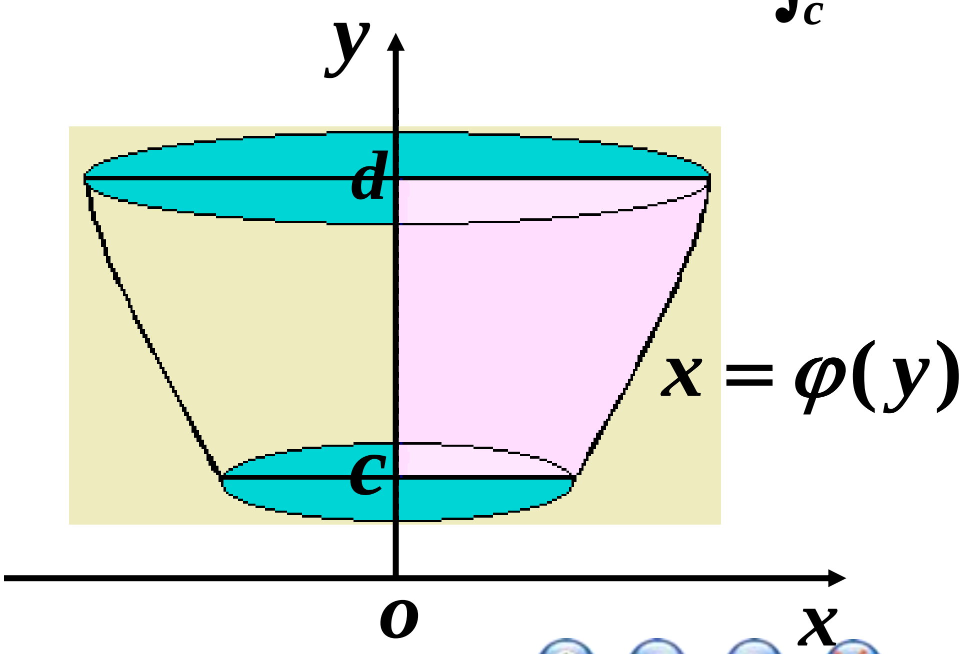
在$[a,b]$上任取小区间$[x, x+dx]$，

取以dx为底的窄边梯形绕x轴旋转而成的薄片的体积为体积元素，$dV = \pi[f(x)]^2 dx$

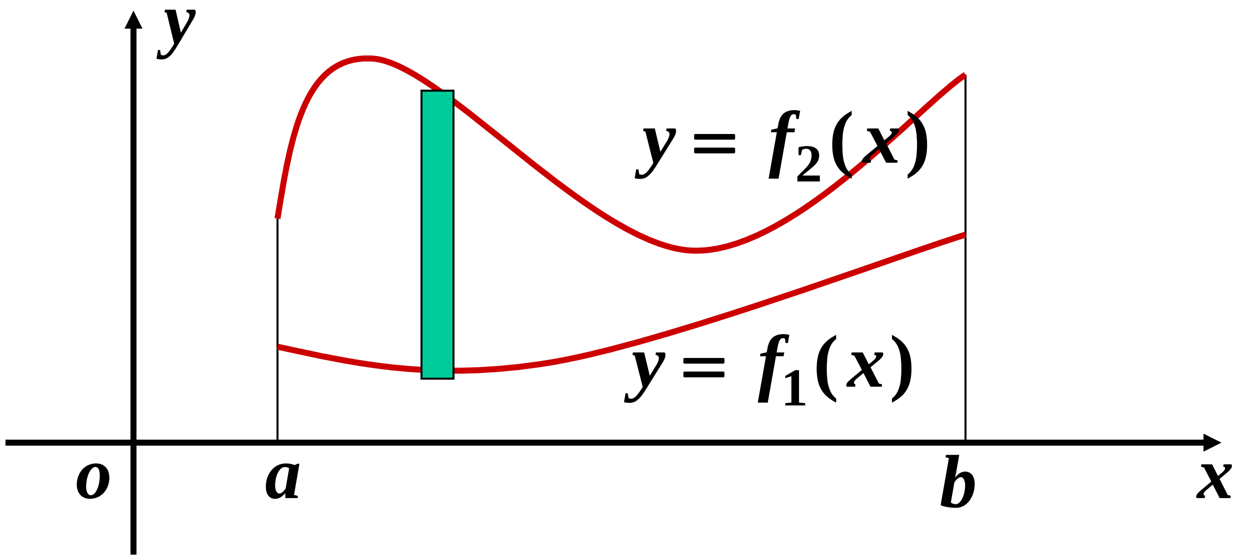
旋转体的体积为 $\boxed{V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx}$

(1) 类似地，如果旋转体是由连续曲线$x=\varphi(y)$、直线$y=c$、$y=d$及y轴所围成的曲边梯形绕y轴旋转一周而成的立体，体积为

$$V=\int_c^d \pi[\varphi(y)]^2 dy$$



(2)平面图形$x=a, x=b, y=f_1(x), y=f_2(x)$,绕$x$轴旋转.



$$x\in[a,b] \quad \forall[x, x+dx] \quad A(x)=\pi f_2^2(x)-\pi f_1^2(x)$$

$$dV=[\pi f_2^2(x)-\pi f_1^2(x)]dx$$

$$V=\int_a^b \pi[f_2^2(x)-f_1^2(x)]dx.$$

计算立体体积习例

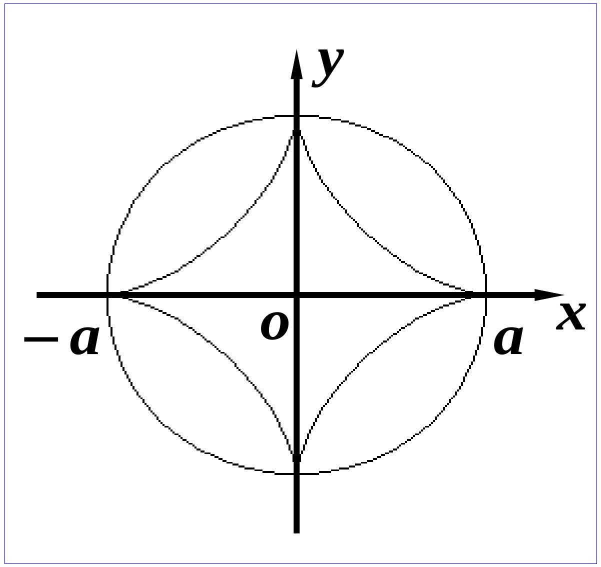
例11 求星形线$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}(a>0)$绕 x 轴旋转构成旋转体的体积.

例12 求椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$绕 x 轴与 y 轴旋转所成的旋转体的体积.

例13 求摆线$x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$的一拱与$y=0$所围成的图形分别绕 x 轴、y 轴旋转构成旋转体的体积.

例14 求由曲线$y=4-x^2$及$y=0$所围成的图形绕直线$x=3$旋转构成旋转体的体积.

例11 求星形线$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\ (a>0)$绕 x 轴旋转构成旋转体的体积.



解 $\because\ y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}},$

$$\therefore\ y^2=\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^3$$

$$x\in[-a,a]$$

旋转体的体积 $V=\int_{-a}^{a}\pi\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^3dx=\frac{32}{105}\pi a^3.$

例12 求椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$绕$x$轴与$y$轴旋转所成的旋转体的体积.

解 (1)绕x轴旋转时, 选x为积分变量,

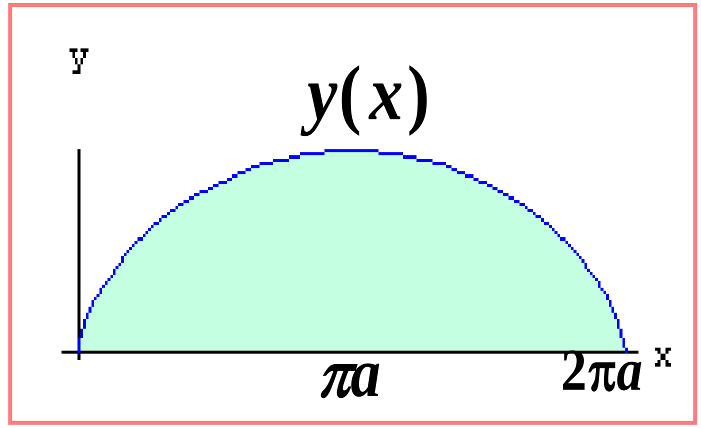
$$x\in[-a,a]. \quad y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

$$\therefore V_x=\int_{-a}^{a}\pi y^2dx=\int_{-a}^{a}\pi b^2(1-\frac{x^2}{a^2})dx=\frac{4}{3}\pi ab^2;$$

(2)绕y轴旋转时, $y\in[-b,b]$. $x=a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}$

$$\therefore V_y=\int_{-b}^{b}\pi x^2dy=\int_{-b}^{b}\pi a^2(1-\frac{y^2}{b^2})dy=\frac{4}{3}\pi a^2b.$$

例13 求摆线 $x = a(t - \sin t)$，$y = a(1 - \cos t)$ 的一拱与 $y = 0$ 所围成的图形分别绕 x 轴、y 轴旋转构成旋转体的体积.



解 绕 x 轴旋转的旋转体体积

$$V_x = \int_0^{2\pi a} \pi y^2(x)dx$$

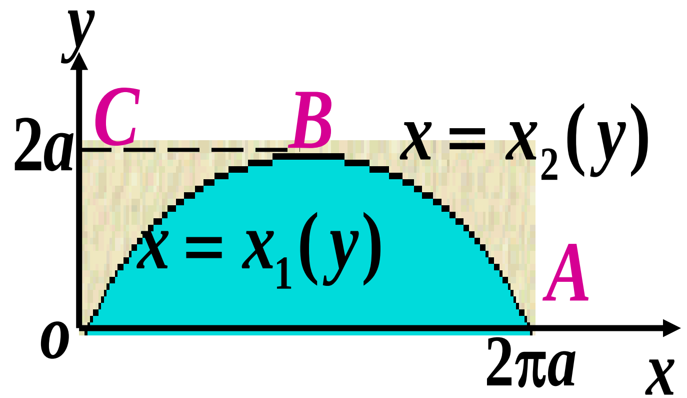
$$= \pi\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 \cdot a(1-\cos t)dt$$

$$= \pi a^3\int_0^{2\pi}(1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t)dt = 5\pi^2a^3.$$

绕y轴旋转的旋转体体积

可看作平面图$OABC$与OBC

分别绕y轴旋转构成旋转体的体积之差.



$$V_y = \int_0^{2a} \pi x_2^2(y)dy - \int_0^{2a} \pi x_1^2(y)dy$$

$$= \pi \int_{2\pi}^{\pi} a^2(t-\sin t)^2 \cdot a\sin t dt$$

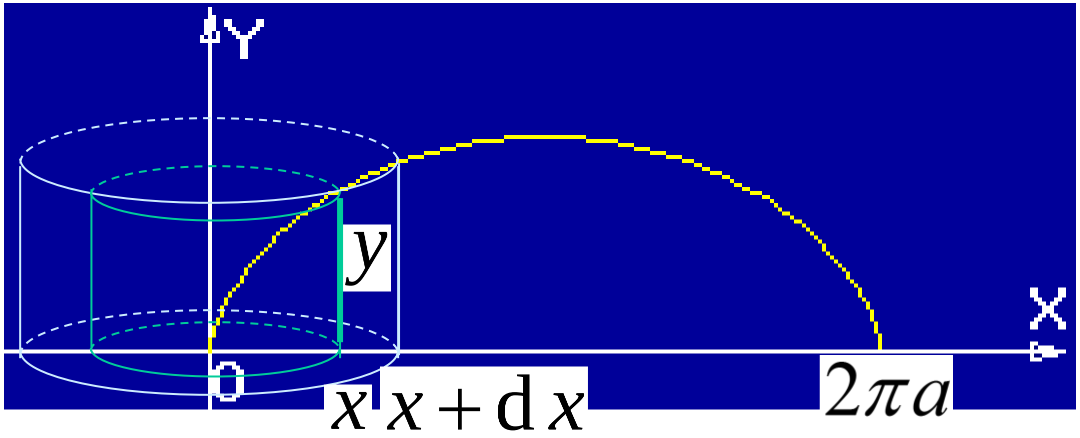
$$-\pi \int_0^{\pi} a^2(t-\sin t)^2 \cdot a\sin t dt$$

$$= -\pi a^3 \int_0^{2\pi} (t-\sin t)^2 \sin t dt \ = 6\pi^3 a^3.$$

（2）解法2（柱壳法）

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

V_y 也可按柱壳法求出



柱面面积 $2\pi x \cdot y$ 柱壳体积 $2\pi xy \cdot \mathrm{d}x$

$$V_y = 2\pi \int_0^{2\pi a} xy\mathrm{d}x$$

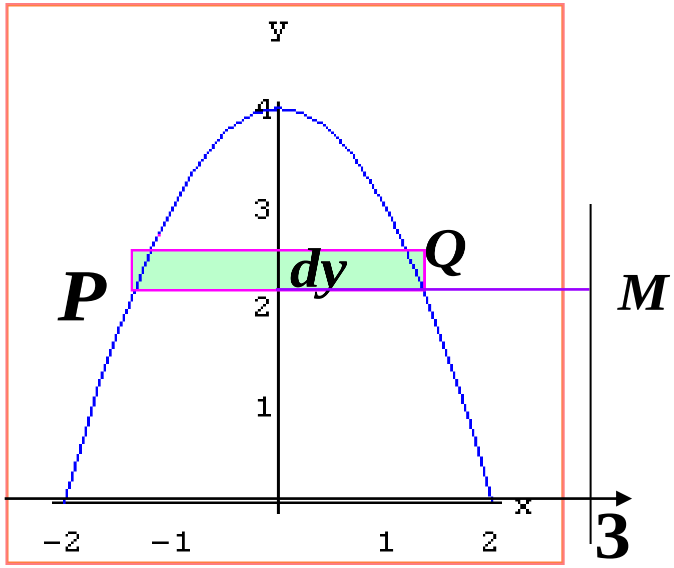
$$= 2\pi \int_0^{2\pi} a(t - \sin t) \cdot a^2(1 - \cos t)^2 \mathrm{d}\, t$$

补充 如果旋转体是由连续曲线$y = f(x)$、直线$x = a$、$x = b$及x轴所围成的曲边梯形绕y轴旋转一周而成的立体，体积为

$$V_y = 2\pi\int_a^b x\,|\,f(x)\,|\,dx$$

例14 求由曲线$y=4-x^2$及$y=0$所围成的图形绕直线$x=3$旋转构成旋转体的体积.

取积分变量为y，$y\in[0,4]$



解 体积元素为

$$dV=[\pi\overline{PM}^2-\pi\overline{QM}^2]dy$$

$$=[\pi(3+\sqrt{4-y})^2-\pi(3-\sqrt{4-y})^2]dy$$

$$=12\pi\sqrt{4-y}dy,$$

$$\therefore V=12\pi\int_0^4\sqrt{4-y}dy=64\pi.$$

内容小结

1. 平面图形的面积

上下限按顺时针方向确定

$$
\text{边界方程}\begin{cases}\text{直角坐标方程} \\ \text{参数方程} \quad A=\int_{t_1}^{t_2}\psi(t)\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \\ \text{极坐标方程} \quad A=\dfrac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\varphi^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta\end{cases}
$$

2. 旋转体的立体体积

$$V=\int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x$$

$$y=y(x)\begin{cases}\text{绕 } x \text{ 轴：} A(x)=\pi y^2 \\ \text{绕 } y \text{ 轴：} A(x)=2\pi xy \quad \text{(柱壳法)}\end{cases}$$