高等数学A

第3章 一元函数积分学

3.1 不定积分

3.1.4 不定积分的换元积分法

中南大学开放式精品示范课堂高等数学建设组

3.1 不定积分

换元积分法

3.1.4 换元积分法

- 第一换元积分法
- 常见的一些凑微分形式
- 第一换元积分法应用习例1-17
- 第二换元积分法
- 第二换元积分法应用习例18-20

基本积分表2

小结与思考题

3.1.4 不定积分的换元法

利用积分性质和简单的积分表可以求出不少函数的原函数，但实际上遇到的积分凭这些方法是不能完全解决的.

现在介绍与复合函数求导法则相对应的积分方法 —— 不定积分换元法. 它是在积分运算过程中进行适当的变量代换，将原来的积分化为对新的变量的积分，而后者的积分是比较容易积出的.

一、第一换元积分法

首先看复合函数的导数公式:

设可微函数 $y=F(u)$, $u=\varphi(x)$ 可构成区间 I 上的可微的复合函数 $y=F(\varphi(x))$, 则

$$(F(\varphi(x)))'=F'(\varphi(x))\varphi'(x),$$

它的微分形式为

$$\mathrm{d}(F(\varphi(x)))=F'(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$$

记 $\underline{F'(u)=f(u)}$, 则

原函数?

被积表达式?

$$\mathrm{d}(F(\varphi(x)))=f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x=\underline{f(u)\,\mathrm{d}u},$$

也是被积表达式?

积分形式不变性

引理 若$\int f(x)dx = F(x)+C$,

则$\int f(u)du = F(u)+C$,其中$u=\varphi(x)$可微.

例如 $\int \cos 2x dx \overset{?}{=} \sin 2x + C$,

原式变形为 $\int \cos 2x dx = \dfrac{1}{2}\int \cos 2x (2x)' dx$

$$\overset{令u=2x}{=} \frac{1}{2}\int \cos u du = \frac{1}{2}\sin u + C$$

$f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}\sin 2x + C.$$

第一换元法(凑微分法)

定理1 设 $f(u)$ 具有原函数，$u=\varphi(x)$ 可导，

则有换元公式

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=[\int f(u)du]_{u=\varphi(x)}=F[\varphi(x)]+C.$$

注意:

(1)第一换元法关键是适当选取 $u=\varphi(x)$ 来凑微分.

(2)第一换元法的过程是:

$$\int g(x)dx = \int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f[\varphi(x)]d\varphi(x)$$

$$\overset{u=\varphi(x)}{=\!=\!=\!=\!=} \int f(u)du = F(u)+C$$

$$\overset{u=\varphi(x)}{=\!=\!=\!=\!=} F[\varphi(x)]+C.$$

实际解题时,常常省略上述过程中的第三与第四等号.

二、常见的一些凑微分形式

常见的一些凑微分形式:

(1) $\int f(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int f(ax+b)\ \mathrm{d}(ax+b)$

$$\left.\begin{aligned}&(2)\ \int f(x^n)x^{n-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int f(x^n)\ \mathrm{d}x^n\\ &(3)\ \int f(x^n)\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int f(x^n)\ \frac{1}{x^n}\ \mathrm{d}x^n\end{aligned}\right\}\text{万能凑幂法}$$

(4) $\int f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x = \int f(\sin x)\,\mathrm{d}\sin x$

(5) $\int f(\cos x)\sin x\mathrm{d}x = -\int f(\cos x)\ \mathrm{d}\cos x$

$$(6)\int f(\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx=\int f(\ln x)d(\ln x)$$

$$(7)\int f(\tan x)\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx=\int f(\tan x)d(\tan x)$$

$$(8)\int f(\cot x)\cdot\frac{1}{\sin^2 x}dx=-\int f(\cot x)d(\cot x)$$

$$(9)\int f(\arcsin x)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int f(\arcsin x)d(\arcsin x)$$

$$(10)\int f(\arctan x)\cdot\frac{1}{1+x^2}dx=\int f(\arctan x)d(\arctan x)$$

$$(11)\int f(e^x)\cdot e^x dx=\int f(e^x)de^x$$

三、第一换元积分法习例

例1 计算 $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx.$

例2 计算 $\int \frac{1}{3+2x}dx.$

例3 计算 $\int \frac{1}{x(1+2\ln x)}dx.$

例4 计算 $\int \frac{x}{(1+x)^3}dx.$

例5 计算 $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx.$

例6 计算 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx.$

例7 计算 $\int \frac{1}{x^2-a^2}dx.$

例8 计算 $\int \frac{1}{1+e^x}dx.$

例9 计算 $\int (1-\frac{1}{x^2})e^{x+\frac{1}{x}}dx.$

例10 计算 $\int \tan x dx.$

例11 计算$\int \frac{1}{1+\cos x}dx.$ 例12 计算$\int \sin^2 x\cdot\cos^5 x dx.$

例13 计算$\int \cos 3x\cos 2x dx.$ 例14 计算$\int \csc x dx.$

例15 计算$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}\arcsin\frac{x}{2}}dx.$

例16 计算$\int \frac{1}{x(1+x^{10})}dx.$

例17 设$f'(\sin^2 x)=\cos^2 x$，求$f(x)$.

例1 计算 $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx.$

解 $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = 2\int \sin\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x})'dx$

$$= 2\int \sin\sqrt{x}\,d\sqrt{x}$$

$$\overset{\sqrt{x}=u}{=\!=\!=\!=} 2\int \sin u\,du = -2\cos u + C$$

$$\overset{\sqrt{x}=u}{=\!=\!=\!=} -2\cos\sqrt{x} + C.$$

例2 计算 $\int \frac{1}{3+2x}dx.$

解 $\int \frac{1}{3+2x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{3+2x}\cdot(3+2x)'dx$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{3+2x}\cdot d(3+2x)$$

$$\overset{3+2x=u}{=\!=\!=\!=} \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\ln|u| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln|3+2x| + C.$$

例3 计算 $\int \frac{1}{x(1+2\ln x)}dx.$

解 $\int \frac{1}{x(1+2\ln x)}dx = \int \frac{1}{1+2\ln x}d(\ln x)$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+2\ln x}d(1+2\ln x)$

$u = 1+2\ln x$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln|1+2\ln x| + C.$

例4 计算 $\int \frac{x}{(1+x)^3}dx.$

解 $\int \frac{x}{(1+x)^3}dx = \int \frac{x+1-1}{(1+x)^3}dx$

$$= \int [\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{(1+x)^3}]d(1+x)$$

$$= -\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2(1+x)^2} + C.$$

例5 计算 $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx.$

想到公式

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \arctan u + C$$

解 $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{1+\frac{x^2}{a^2}}dx$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}d\left(\frac{x}{a}\right) = \boxed{\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C.}$$

作为公式

练习题 $\int \frac{1}{x^2-8x+25}dx.$

练习题 $\int \frac{1}{x^2-8x+25}dx.$

解 $\int \frac{1}{x^2-8x+25}dx = \int \frac{1}{(x-4)^2+9}dx$

$$= \int \frac{1}{(x-4)^2+3^2}d(x-4)$$

$$= \frac{1}{3}\arctan\frac{x-4}{3}+C.$$

例6 计算 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}\ (a>0).$

解 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{a\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}} = \int \frac{\mathrm{d}(\frac{x}{a})}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}}$

$$= \arcsin\frac{x}{a} + C$$

想到 $\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C$

$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int f(\varphi(x))\mathrm{d}\varphi(x)$ (直接配元)

例7 计算 $\int \frac{1}{x^2-a^2}dx.$

解 $$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2a}\left[\int\frac{1}{x-a}d(x-a)-\int\frac{1}{x+a}d(x+a)\right]$$

$$=\frac{1}{2a}\left[\ln|x-a|-\ln|x+a|\right]+C$$

$$\boxed{=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C.}$$

例8 计算 $\int \frac{1}{1+e^x}dx.$

解 $\int \frac{1}{1+e^x}dx = \int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}dx$

$$= \int \left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx = \int dx - \int \frac{e^x}{1+e^x}dx$$

$$= \int dx - \int \frac{1}{1+e^x}d(1+e^x)$$

$$= x - \ln(1+e^x) + C.$$

例9 计算 $\int (1-\frac{1}{x^2})e^{x+\frac{1}{x}}dx.$

解 $\because \left(x+\frac{1}{x}\right)' = 1-\frac{1}{x^2},$

$$\therefore \int (1-\frac{1}{x^2})e^{x+\frac{1}{x}}dx$$

$$= \int e^{x+\frac{1}{x}}d(x+\frac{1}{x}) = e^{x+\frac{1}{x}} + C.$$

例10 **计算** $\int \tan x dx.$

解 $$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x}$$

$$\boxed{= -\ln|\cos x| + C}$$

类似

$$\int \cot x dx = \int \frac{\cos x dx}{\sin x} = \int \frac{d\sin x}{\sin x}$$

$$\boxed{= \ln|\sin x| + C}$$

例11 计算 $\int \frac{1}{1+\cos x}dx.$

解 $\int \frac{1}{1+\cos x}dx = \int \frac{1-\cos x}{(1+\cos x)(1-\cos x)}dx$

$$= \int \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}dx - \int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx$$

$$= \int \frac{1}{\sin^2 x}dx - \int \frac{1}{\sin^2 x}d(\sin x)$$

$$= -\cot x + \frac{1}{\sin x} + C.$$

例12 计算 $\int \sin^2 x \cdot \cos^5 x dx.$

解 $\int \sin^2 x \cdot \cos^5 x dx = \int \sin^2 x \cdot \cos^4 x d(\sin x)$

$$= \int \sin^2 x \cdot (1-\sin^2 x)^2 d(\sin x)$$

$$= \int (\sin^2 x - 2\sin^4 x + \sin^6 x) d(\sin x)$$

$$= \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + C.$$

注意: 当被积函数是三角函数相乘时，拆开奇次项去凑微分.

例13 计算 $\int \cos 3x \cos 2x dx.$

解 $\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) + \cos(A+B)],$

$$\cos 3x \cos 2x = \frac{1}{2}(\cos x + \cos 5x),$$

$$\int \cos 3x \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int (\cos x + \cos 5x) dx$$

$$= \frac{1}{2}[\int \cos x dx + \frac{1}{5}\int \cos 5x d(5x)]$$

$$= \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{10}\sin 5x + C.$$

例14 计算 $\int \csc x dx.$

解(1) $\int \csc x dx = \int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} dx$

$$= \int \frac{\left(\sec\frac{x}{2}\right)^2}{\tan\frac{x}{2}} d\left(\frac{x}{2}\right) = \int \frac{1}{\tan\frac{x}{2}} d\left(\tan\frac{x}{2}\right)$$

$$= \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C \boxed{= \ln\left|\csc x - \cot x\right| + C.}$$

（使用了三角函数恒等变形）

解(2) $\int \csc x dx = \int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx$

$$= -\int \frac{1}{1-\cos^2 x} d(\cos x)$$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 x - 1} d(\cos x)$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + C.$$

同理可得 $\boxed{\int \sec x dx = \ln \left| \sec x + \tan x \right| + C.}$

例15 计算 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}\arcsin\frac{x}{2}}dx.$

解 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}\arcsin\frac{x}{2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\arcsin\frac{x}{2}}d\frac{x}{2}$

$$= \int \frac{1}{\arcsin\frac{x}{2}}d\left(\arcsin\frac{x}{2}\right) = \ln\left|\arcsin\frac{x}{2}\right| + C.$$

例16 $\displaystyle\int \frac{1}{x(1+x^{10})}dx.$

解（1） 用万能凑幂法

$$\int \frac{\mathrm{d}\,x}{x\,(x^{10}+1)} = \frac{1}{10}\int \frac{\mathrm{d}\;x^{10}}{x^{10}(x^{10}+1)}$$

$$= \frac{1}{10}\int \frac{\mathrm{d}\,u}{u\,(u+1)} = \frac{1}{10}\int \frac{1+u-u}{u(1+u)}\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{10}\left(\int \frac{1}{u}\mathrm{d}u - \int \frac{1}{1+u}du\right) = \frac{1}{10}\left(\ln u - lu(u+1)\right)+C$$

$$= \frac{1}{10}\ln \frac{x^{10}}{1+x^{10}}+C$$

解(2) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^{10}+1)} = \int \frac{(x^{10}+1)-x^{10}}{x(x^{10}+1)}\mathrm{d}x$$

解(3) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^{10}+1)} = \int \frac{\mathrm{d}\,x}{x^{11}(1+x^{-10})} = \frac{-1}{10}\int \frac{\mathrm{d}\,x^{-10}}{1+x^{-10}}$$

例17 设$f'(\sin^2 x)=\cos^2 x$，求$f(x)$.

解 令 $u=\sin^2 x \Rightarrow \cos^2 x = 1-u$,

$$f'(u)=1-u,$$

$$f(u)=\int f'(u)du=\int(1-u)du=u-\frac{1}{2}u^2+C,$$

$$\therefore f(x)=x-\frac{1}{2}x^2+C.$$

另解 $f(\sin^2 x)=\int f'(\sin^2 x)d(\sin^2 x)=\int \cos^2 x d(\sin^2 x)$

$$=\int(1-\sin^2 x)d(\sin^2 x)$$

$$=\sin^2 x-\frac{1}{2}(\sin^2 x)^2+C.$$

四、第二换元积分法

问题 $\int\sqrt{a^2-x^2}dx=?\quad(a>0)$

方法 改变中间变量的设置方法.

令 $x=a\sin t\Rightarrow dx=a\cos tdt$,

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\int\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\cdot a\cos tdt$$

$$=a^2\int\cos^2 tdt=\cdots\cdots$$

（应用"凑微分"即可求出结果）

定理 2 设$x=\psi(t)$是单调的、可导的函数，并且$\psi'(t)\neq 0$，又设$f[\psi(t)]\psi'(t)$具有原函数，则有换元公式$\int f(x)dx=\left[\int f[\psi(t)]\psi'(t)dt\right]_{t=\overline{\psi}(x)}$

其中$\overline{\psi}(x)$是$x=\psi(t)$的反函数.

证 设$\Phi(t)$为$f[\psi(t)]\psi'(t)$的原函数,

左边$=\Phi(t)+C=\Phi[\overline{\psi}(x)]+C,$

令$F(x)=\Phi[\overline{\psi}(x)]$

则 $F'(x)=\dfrac{d\Phi}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx}=f[\psi(t)]\psi'(t)\cdot\dfrac{1}{\psi'(t)}$

$$= f[\psi(t)] = f(x).$$

说明$F(x)$为$f(x)$的原函数,

$$\therefore \quad \int f(x)dx = F(x) + C = \Phi[\overline{\psi}(x)] + C,$$

$$\int f(x)dx = \left[\int f[\psi(t)]\psi'(t)dt\right]_{t=\overline{\psi}(x)}$$

注意:

$$(1) \int f(x)dx \xlongequal{x=\psi(t)} \int f[\psi(t)]\cdot\psi'(t)dt = \int g(t)dt = \Phi(t) + C$$

$$\xlongequal{t=\overline{\psi}(x)} \Phi[\overline{\psi(x)}] + C.$$

(2)一般规律如下：当被积函数中含有

(a) $\sqrt{a^2 - x^2}$ 可令$x = a\sin t$;

(b) $\sqrt{a^2 + x^2}$ 可令$x = a\tan t$;

(c) $\sqrt{x^2 - a^2}$ 可令$x = a\sec t$.

(3)以上三种代换称为三角代换.通常通过三角代换去根号.

(4)并不是所有含$\sqrt{a^2 - x^2}, \sqrt{x^2 + a^2}, \sqrt{x^2 - a^2}$的积分都用三角代换,也可凑微分.如$\int x\sqrt{a^2 - x^2}dx$.

(5)第二换元法除了三角代换外还有倒代换$x = \dfrac{1}{t}$及其他.

五、第二换元积分法习例

例18 计算 $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx \quad (a > 0).$

例19 计算 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}\,dx \quad (a > 0).$

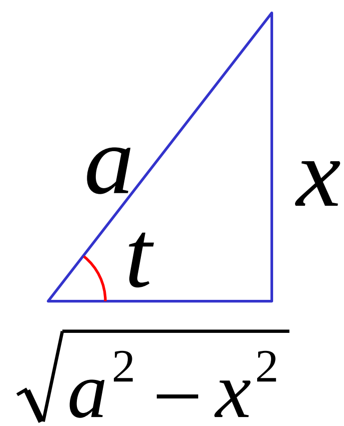
例20 计算 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}\,dx \quad (a > 0).$

例18 计算 $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x\ \ (a > 0)$.

解 令 $x = a\sin t,\ t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 则

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} = a\cos t$$

$$\mathrm{d}x = a\cos t\,\mathrm{d}t$$



$$\therefore \text{原式} = \int a\cos t \cdot a\cos t\,\mathrm{d}t = a^2\int \cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$= a^2\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right) + C$$

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2 \cdot \frac{x}{a} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + C$$

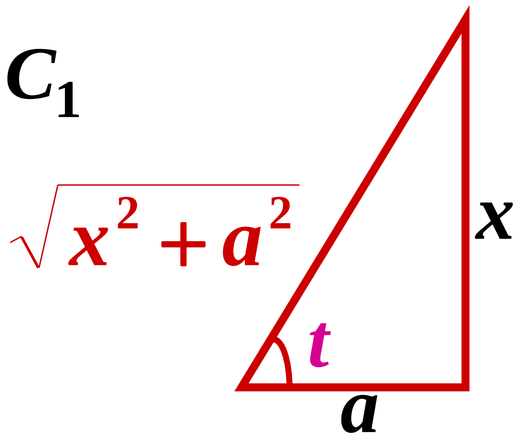
例19 计算 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx \quad (a>0).$

解 令 $x = a\tan t \Rightarrow dx = a\sec^2 t\,dt \quad t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \int \frac{1}{a\sec t}\cdot a\sec^2 t\,dt$$

$$= \int \sec t\,dt \quad = \ln\left|\sec t + \tan t\right| + C_1$$

$$= \ln\left(\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}+\frac{x}{a}\right)+C_1$$



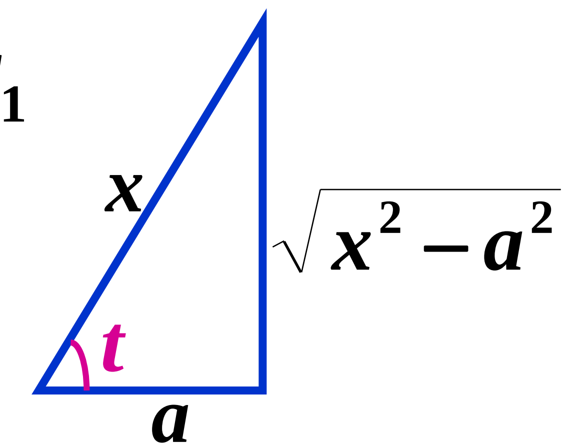
$$= \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C. \qquad (C = C_1 - \ln a)$$

例20 计算 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx \quad (a>0).$

解 令 $x = a\sec t \quad dx = a\sec t\tan t dt \quad t\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \int \frac{a\sec t\cdot\tan t}{a\tan t}dt$$

$$= \int \sec t dt \; = \ln\left|\sec t + \tan t\right| + C_1$$



$$= \ln\left|\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + C_1$$

$$= \ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + C.$$

注意： 以上几例所使用的均为三角代换.

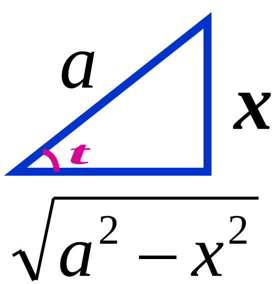
三角代换的目的是消去根式.

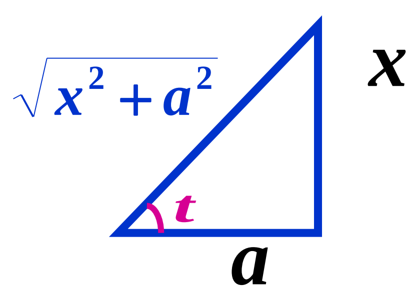
一般规律如下：当被积函数中含有

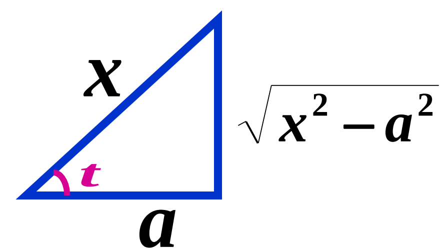
(1) $\sqrt{a^2 - x^2}$ 可令 $x = a\sin t$;

(2) $\sqrt{a^2 + x^2}$ 可令 $x = a\tan t$;

(3) $\sqrt{x^2 - a^2}$ 可令 $x = a\sec t$.







基本积分表2—公式16-24

基本积分表

(16) $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C;$

(17) $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C;$

(18) $\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C;$

(19) $\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C;$

(20) $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C;$

$$(21)\quad \int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C;$$

$$(22)\quad \int \frac{1}{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C;$$

$$(23)\quad \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a} + C;$$

$$(24)\quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| + C.$$

小结

两类积分换元法：

（一）凑微分

（二）三角代换

基本积分表(2)

在第一类换元法中，选择变量代换，没有一般规律。要求：熟记基本积分公式，多做练习。

思考题

1 第一、二类换元法的主要区别

2 三角换元时变量应如何回代？