《计算机图形学基础》

第九讲 射影几何 + 纹理映射

刘永进

射影几何

(Projective Geometry)

仿射变换（affine transformation）

- 平移
- 旋转
- 缩放
- 错切
- 六个自由度
- 可由三对对应点计算得出

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}' = \mathrm{H}_{\mathrm{A}}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

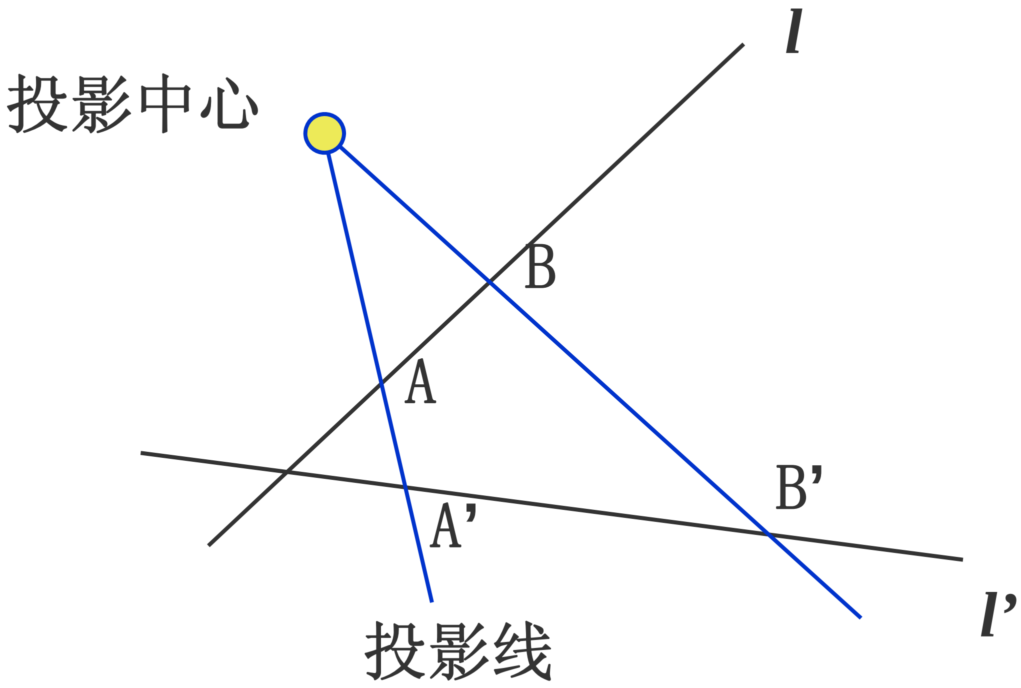
变换的数学建模

- 由一般到特殊
- 射影几何学

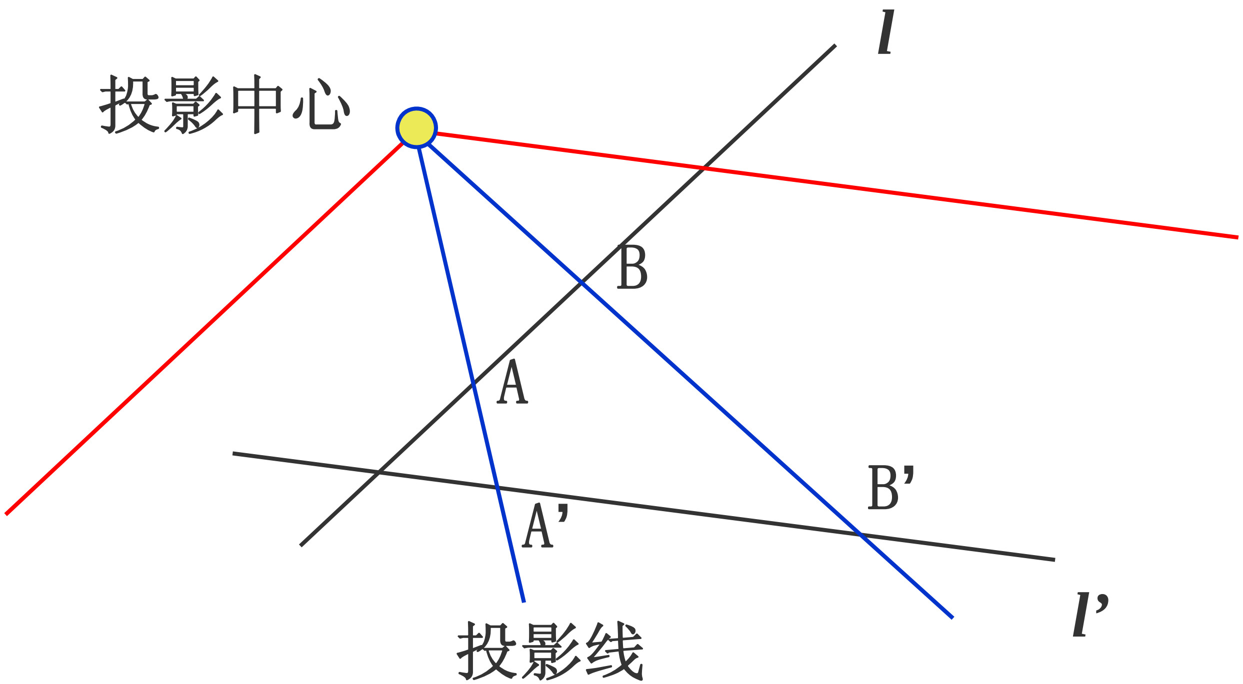
  研究图形在射影变换下不变的性质的几何学
- 法国建筑工程师Desargues

  《用透视表示对象的一般方法》

中心投影（透视）

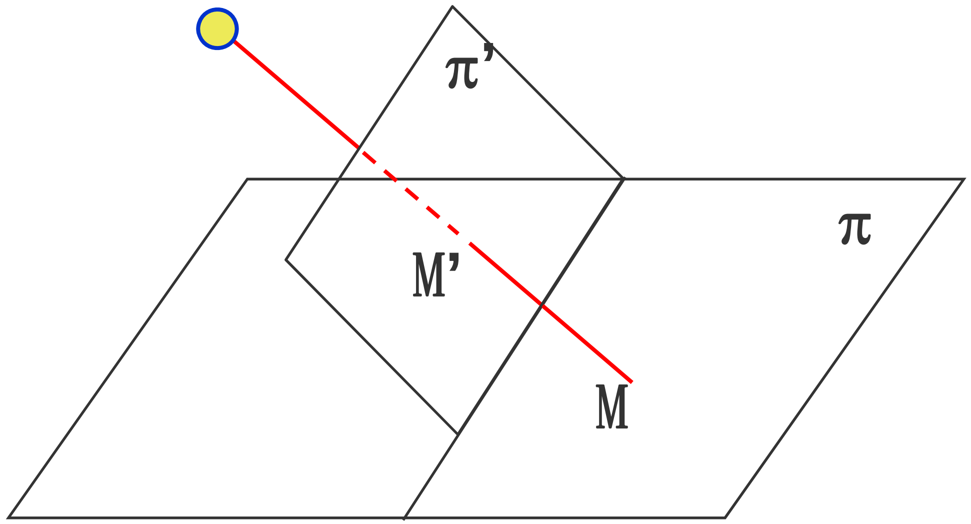


理想点（无穷远点）

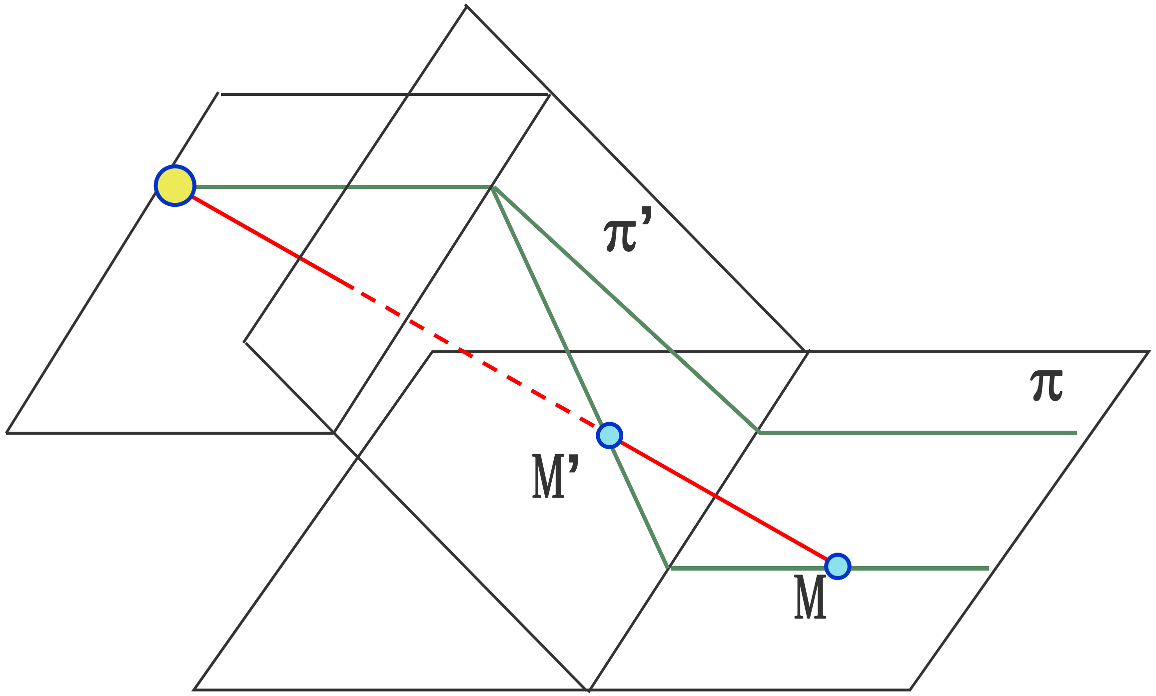


欧氏直线补充了理想点后，称为射影直线

平面到平面的中心投影（透视）



理想直线（无穷直线）



欧氏平面补充了理想点后，称为射影平面

齐次坐标

- 直线：无穷远点
- 平面：无穷远线

$$x \Rightarrow (\lambda x_1, \lambda x_2), \quad x = \frac{x_1}{x_2}, \lambda \neq 0$$

$$(x, y) \Rightarrow (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3), \quad x = \frac{x_1}{x_3}, y = \frac{x_2}{x_3}, \lambda \neq 0$$

齐次坐标

- 直线：无穷远点

$(x_1,0)=x_1(1,0)$　代表无穷远点

$(0,0)$　不代表任何点

齐次坐标

- 平面：无穷远线

$(x_1, x_2, 0)$ 以(x_1, x_2)为方向参数的直线上无穷远点

$(1,0,0)$ x轴上的无穷远点

$(0,1,0)$ y轴上的无穷远点

$(0,0,0)$ 不代表任何点

$(1,k,0)$ 斜率为k的直线上无穷远点

齐次坐标

- 平面上的直线

$$u_1x+u_2y+u_3=0$$

$$\Big\downarrow \text{齐次坐标表示}$$

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$$

齐次坐标

- 平面上的二次曲线

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

$$\Big\downarrow \text{齐次坐标表示}$$

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

（x_1, x_2, x_3）的二次齐次式

齐次坐标

- 平面上的两条直线

$$a: a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \quad (a \cdot x = 0)$$

$$b: b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0 \quad (b \cdot x = 0)$$

交点：

$$x_1 : x_2 : x_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$x = a \times b$$

齐次坐标

- 点几何

以点为基本元素，点有坐标，直线有方程。
直线看做点移动的轨迹。

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$$

齐次坐标

- 线几何

以直线为基本元素，直线有坐标，点有方程。点看做直线转动的包络。

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$$

两直线的交点：

$$\left.\begin{array}{r} ux=0 \\ vx=0 \end{array}\right\} \Rightarrow p=u\times v$$

对偶原理 $u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$

- 点几何

1. 两点决定一直线；
2. 点a, b所决定的直线，其坐标为a×b；
3. 三点共线的条件为

$$\begin{vmatrix} a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

对偶原理 $u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$

- 线几何

1. 两直线决定一点；
2. 直线a, b所决定的点，其坐标为a×b；
3. 三直线共点的条件为

$$\begin{vmatrix} a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

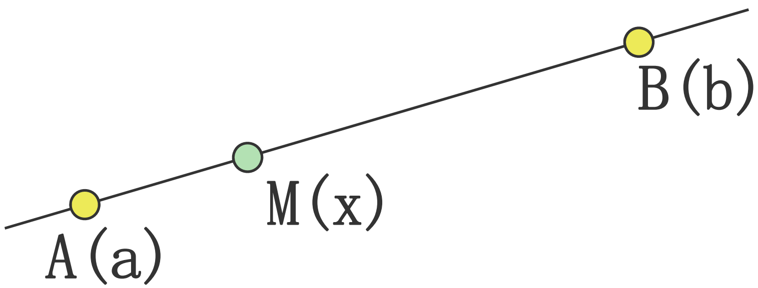
平面射影几何对偶原理

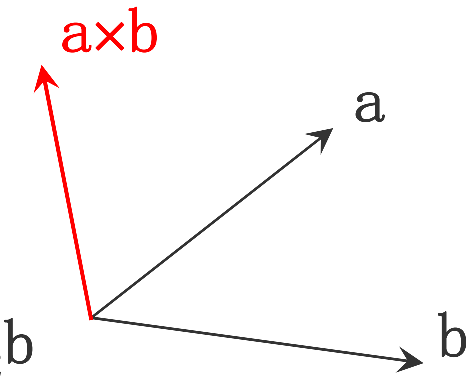
关于平面上的元素（点与直线）的每个射影命题，都对应着另一个对偶命题，第二命题由第一命题得来，即将每一元素换为其对偶元素。如果两个命题之一成立，那么另一命题也成立。

一维射影几何学

- 对象：一维几何图形
- 特征：用一个独立参数描述的几何图形
- 实例：点列和线束
- 基本不变量：交比
- 射影对应、对合对应

两点A(a),B(b)连线上任一点M(x)的坐标可用矢量a,b的线性组合来表示。





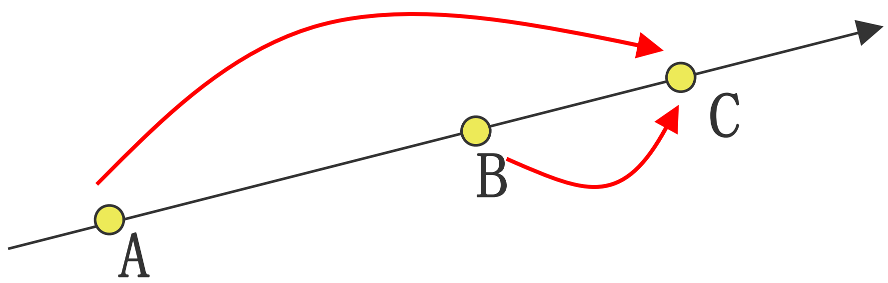
$\lambda_1 a+\lambda_2 b$

$a+\lambda b$

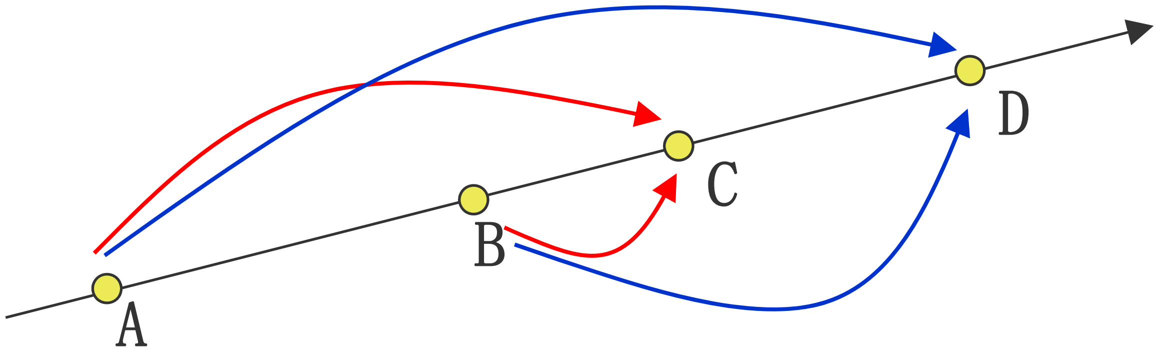
共线三点的简比(ratio)

- A, B, C三点共线，这三点的简比定义为：

$$(ABC)=\frac{AC}{BC}=-\frac{AC}{CB}$$

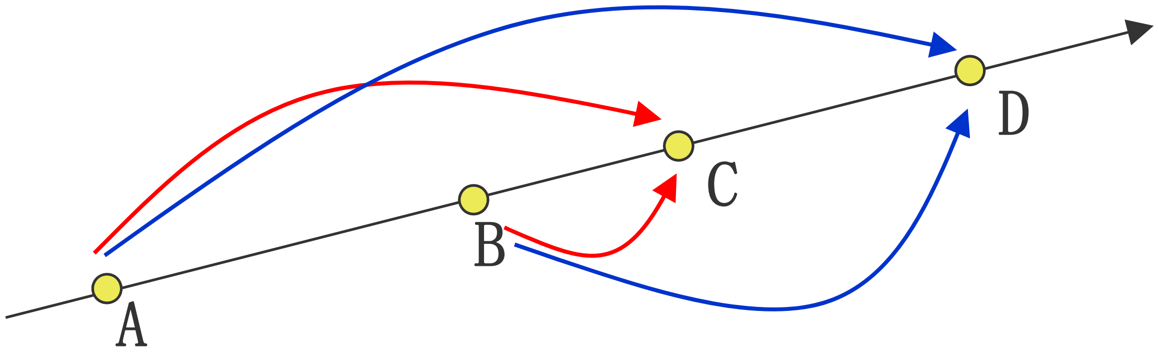


共线四点的交比(cross ratio)



$$(AB,CD)=\frac{AC\cdot BD}{AD\cdot BC}=\frac{AC}{BC}\Big/\frac{AD}{BD}=\frac{(ABC)}{(ABD)}$$

共线四点的交比(cross ratio)

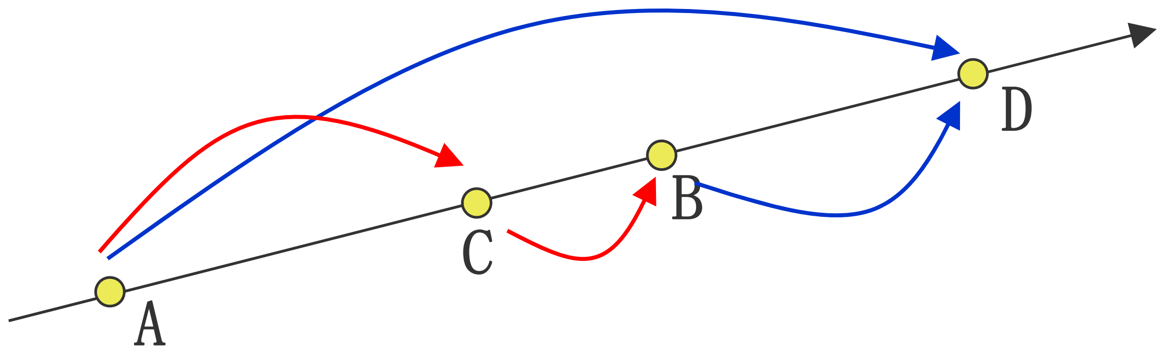


$$a, b, a+\lambda_1 b, a+\lambda_2 b, \quad (\lambda_1\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)\neq 0)$$

$$(AB, CD)=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

调和分割

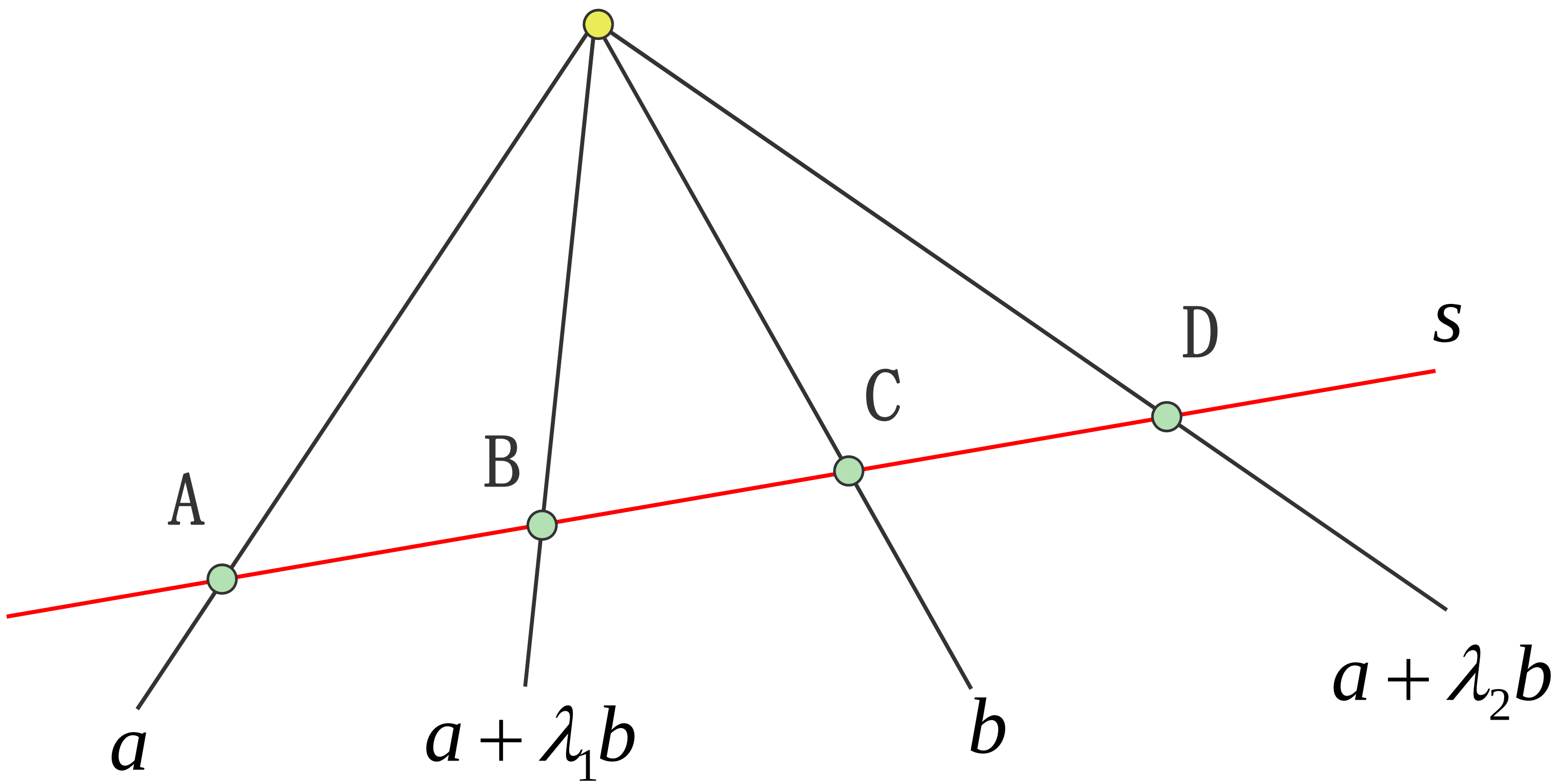
$$(AB,CD)=-1 \Rightarrow \frac{AC}{BC}=-\frac{AD}{BD}$$



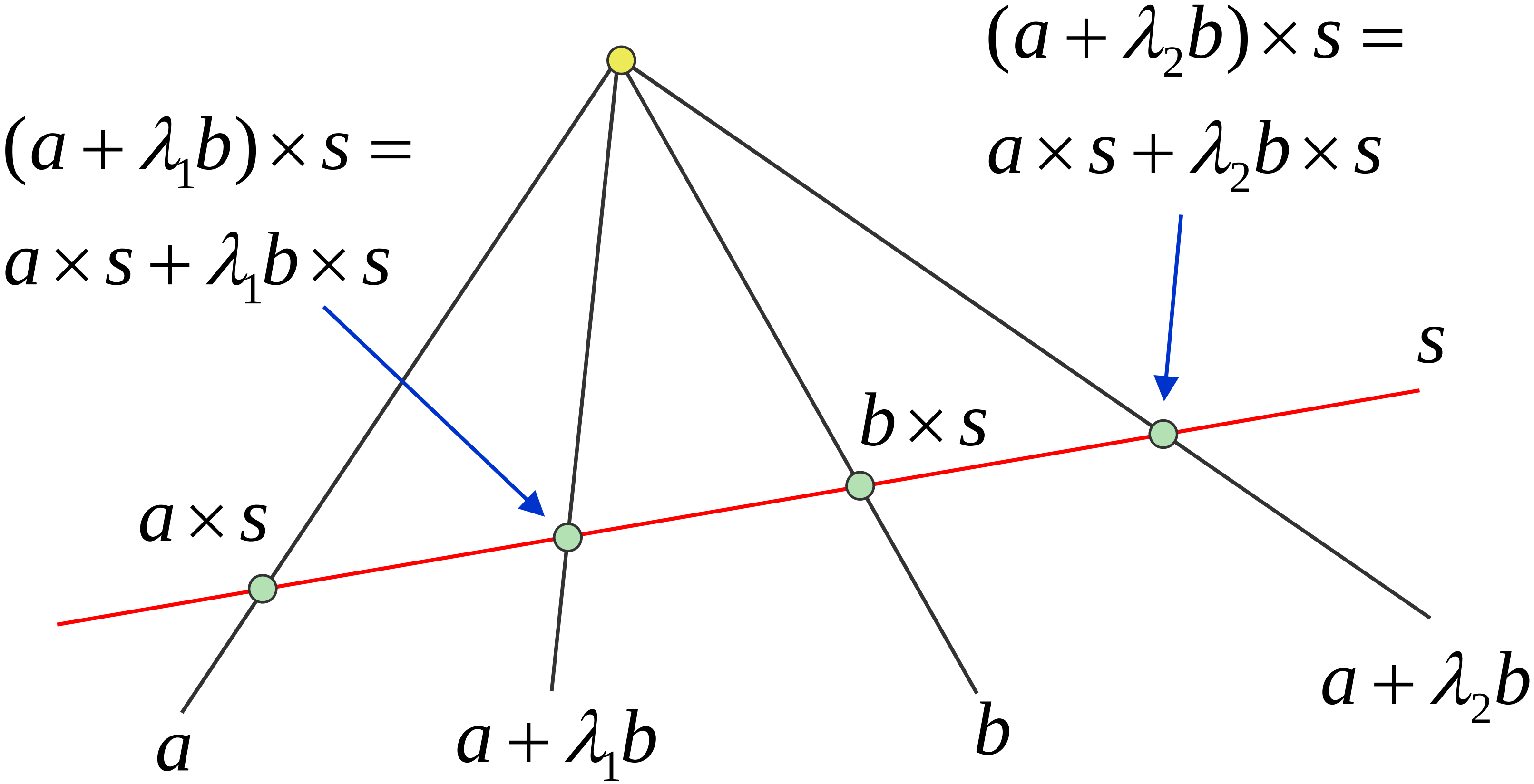
调和分割

- 几何反演
- 复变函数中的保圆变换
- 偏微分方程中球的Green函数

线束的交比

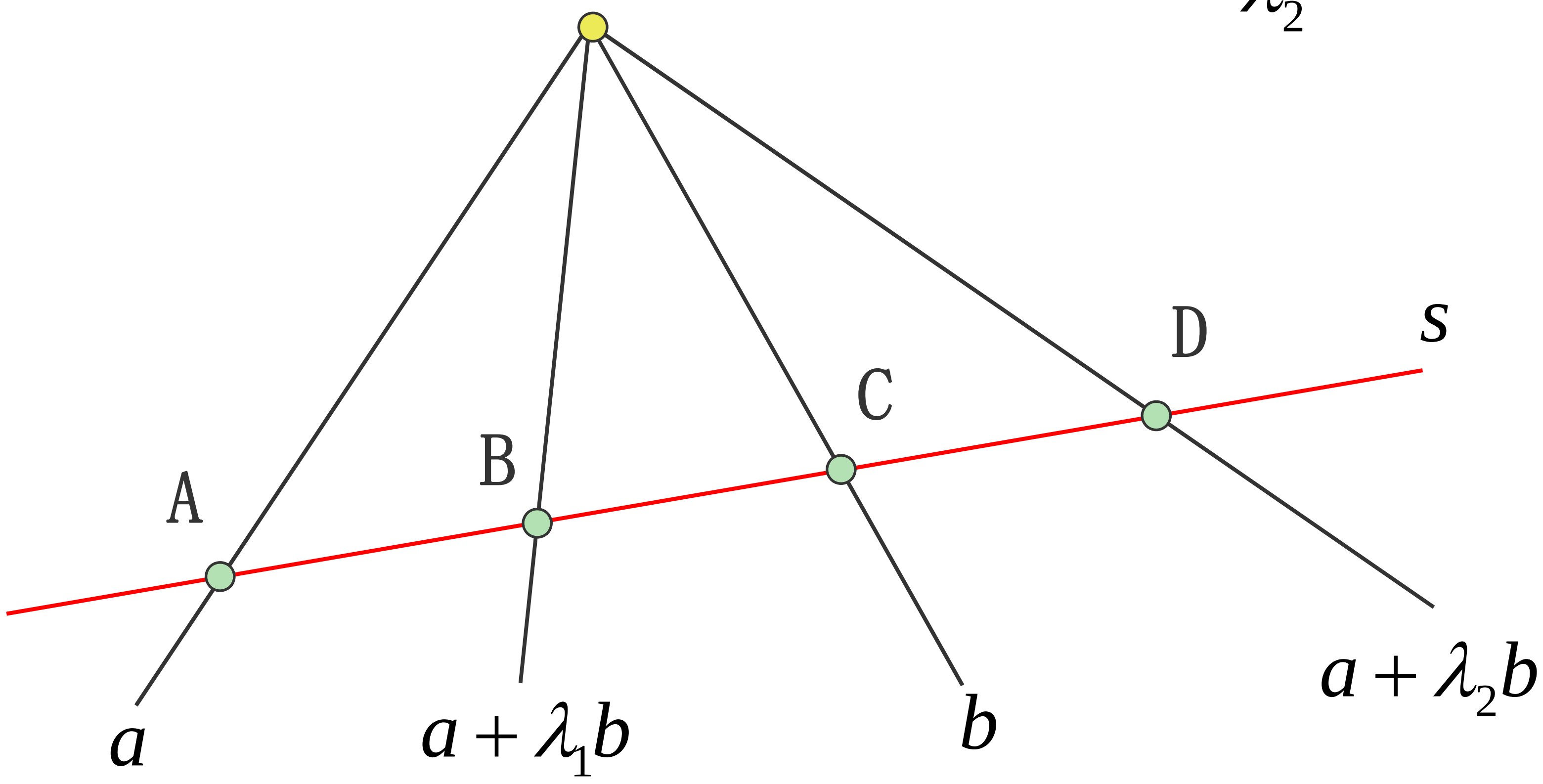


线束的交比


$(a+\lambda_2 b)\times s=$
$a\times s+\lambda_2 b\times s$
$(a+\lambda_1 b)\times s=$
$a\times s+\lambda_1 b\times s$
s
$b\times s$
$a\times s$
a
$a+\lambda_1 b$
b
$a+\lambda_2 b$

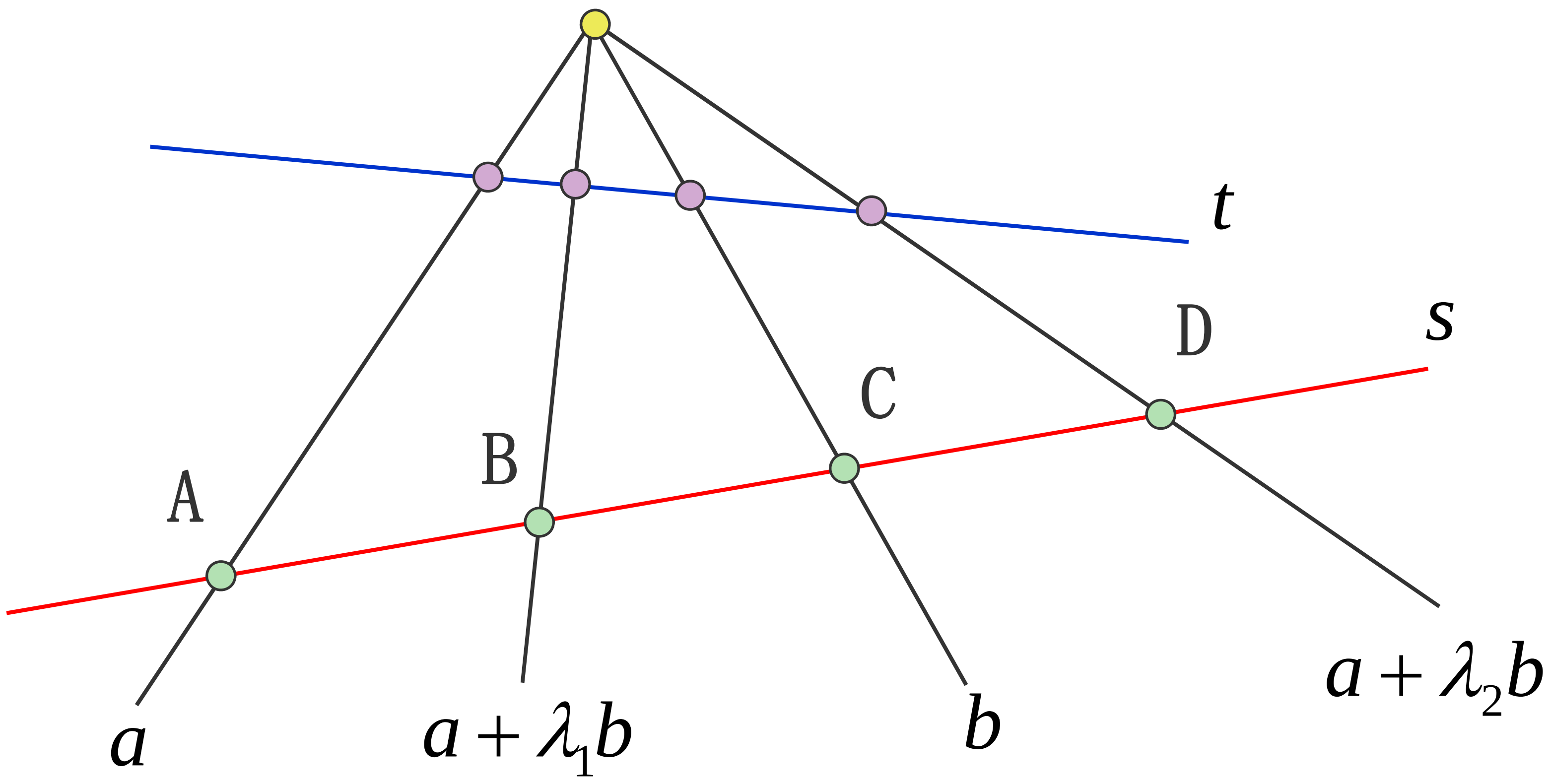
线束的交比

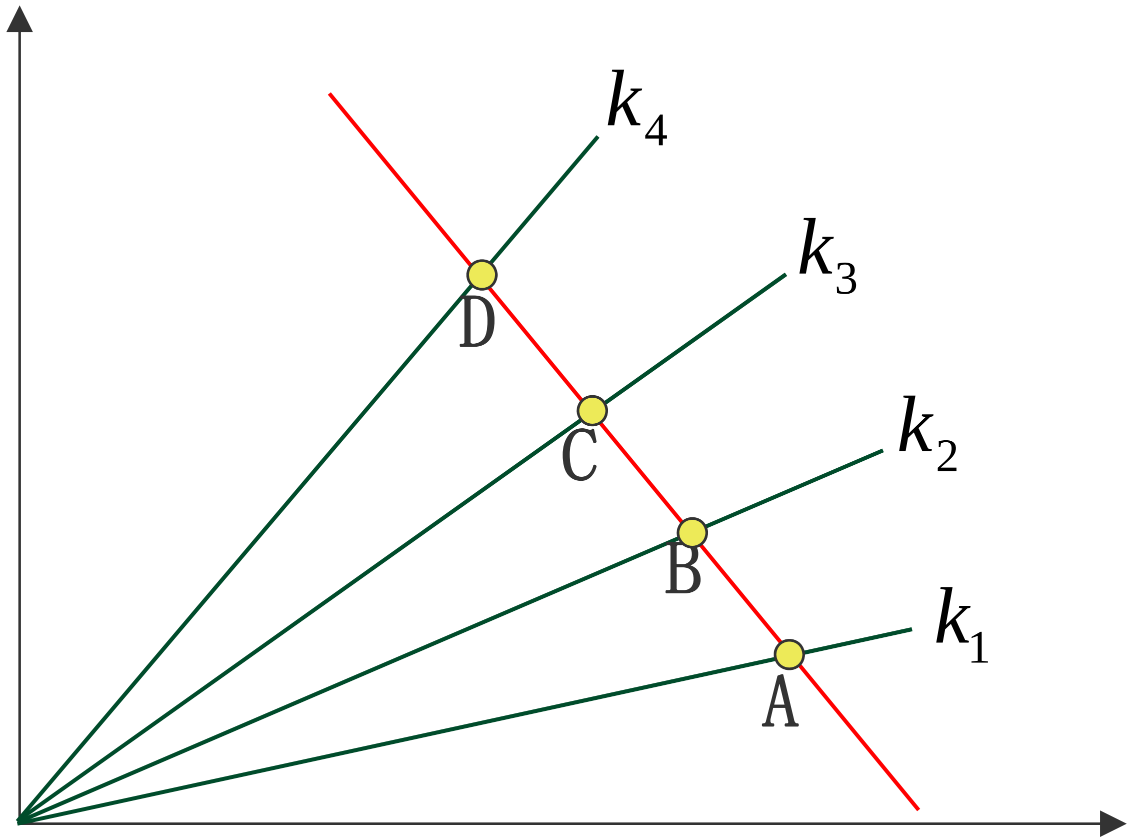
$$(AB,CD)=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$



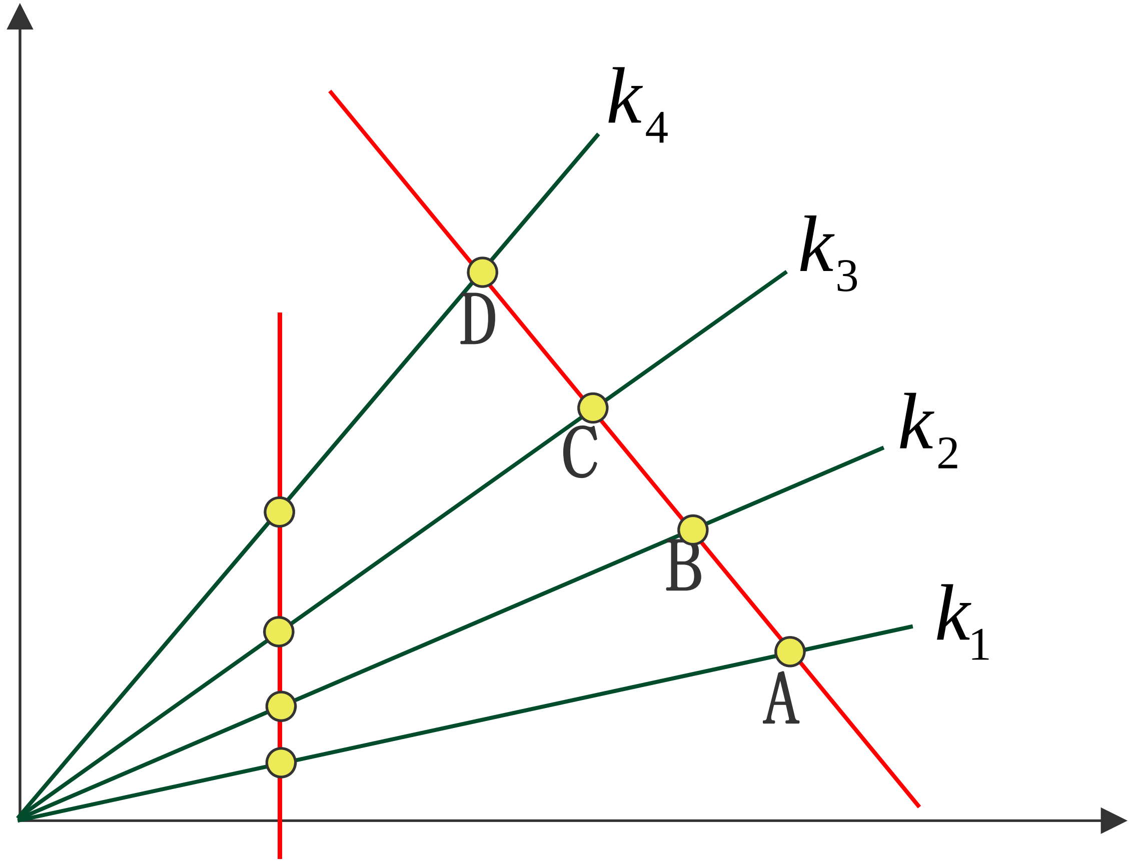
线束的交比

$$(AB,CD)=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$





$$\frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC}$$



$$\frac{AC\cdot BD}{AD\cdot BC}=\frac{(k_3-k_1)(k_4-k_2)}{(k_4-k_1)(k_3-k_2)}$$

一维射影对应 $\overline{\Lambda}$

- 设有两点列（线束），动点（线束）坐标坐标为 $p+\mu q, p'+\mu' q'$

- 若对应点的参数 μ,μ' 满足双一次方程

$$a\mu\mu'+b\mu+c\mu'+d=0,\quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq 0$$

- 则称这两点列（线束）成射影对应

$$a\mu\mu' + b\mu + c\mu' + d = 0, \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\mu' = \frac{-b\mu - d}{a\mu + c}$$

若μ'是μ的射影函数，μ''是μ'的射影函数，则μ''是μ的射影函数（传递性）。

若两个一维基本图形成射影对应，则对应四元素的交比相等。

若两个一维基本图形成射影对应，则对应四元素的交比相等。

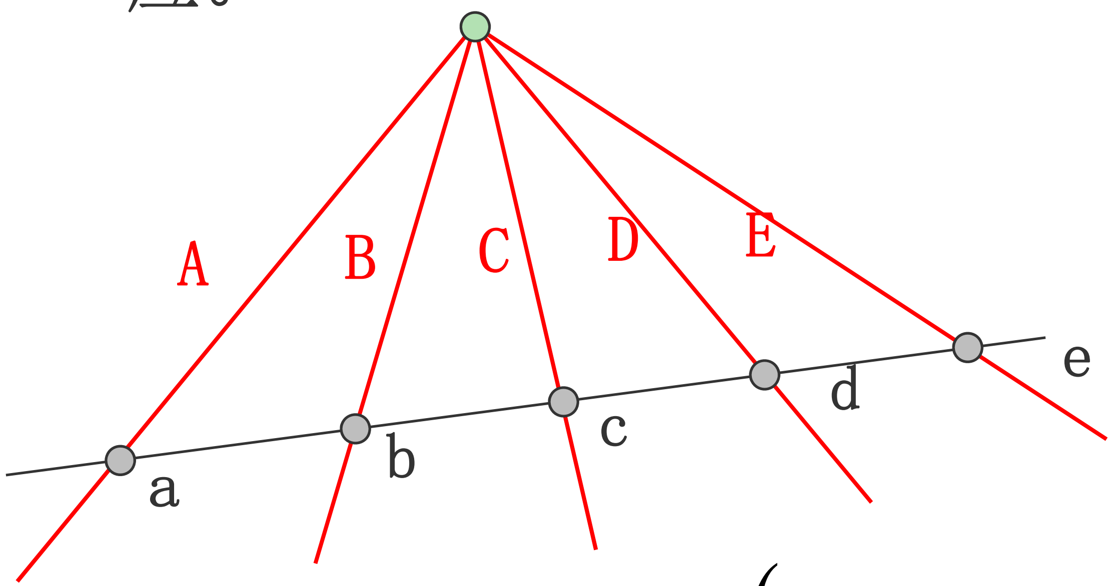
若两个一维基本图形对应四元素的交比相等，则必成射影对应。

若两个一维基本图形成射影对应的充要条件为：对应元素的交比相等。

交比是射影不变量！

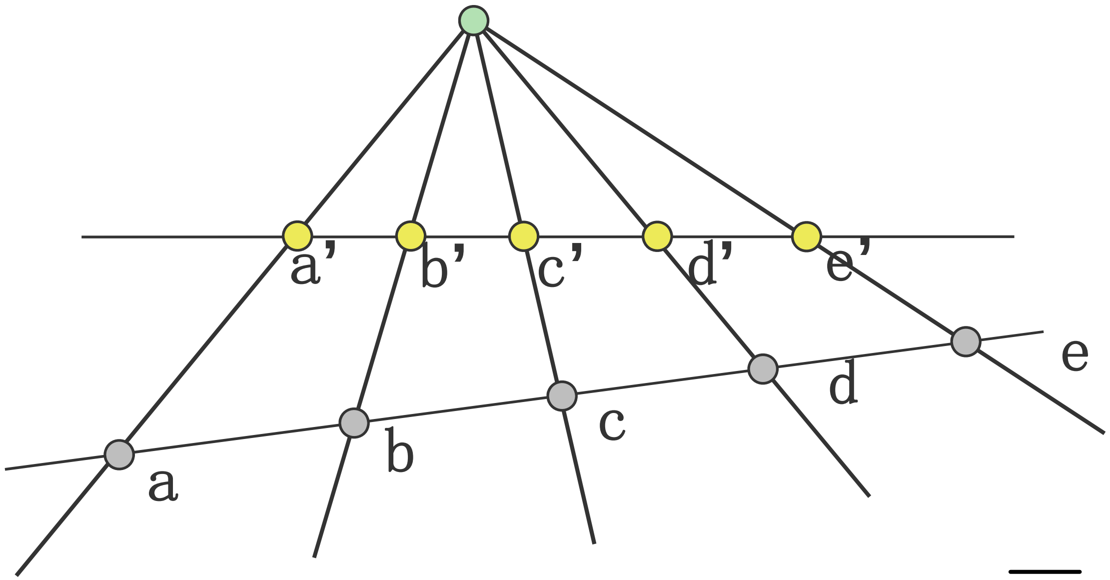
射影对应 $\overline{\wedge}$ 与透视 $\overline{\overline{\wedge}}$

点列和线束成射影对应，并且对应线通过对应点的特殊射影对应，称为透视对应。

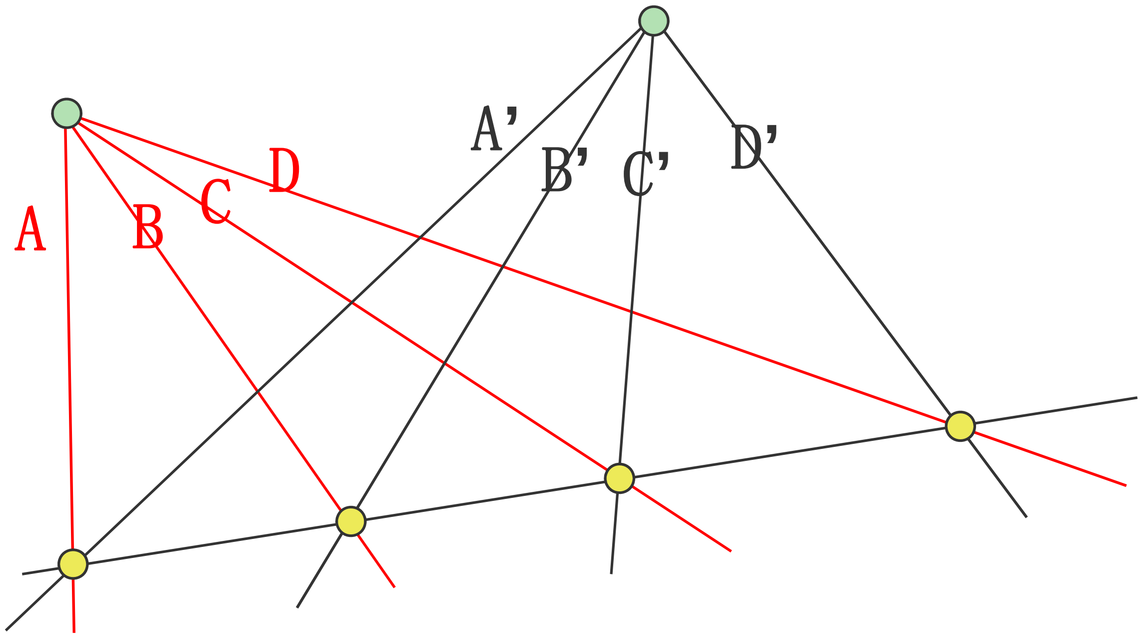


$$(A,B,C,\cdots)\overline{\overline{\wedge}}(a,b,c,\cdots)$$

如果两个点列和同一线束成透视对应，
则称两个点列成透视对应。几何特征为：
两个点列对应点的连线共点。



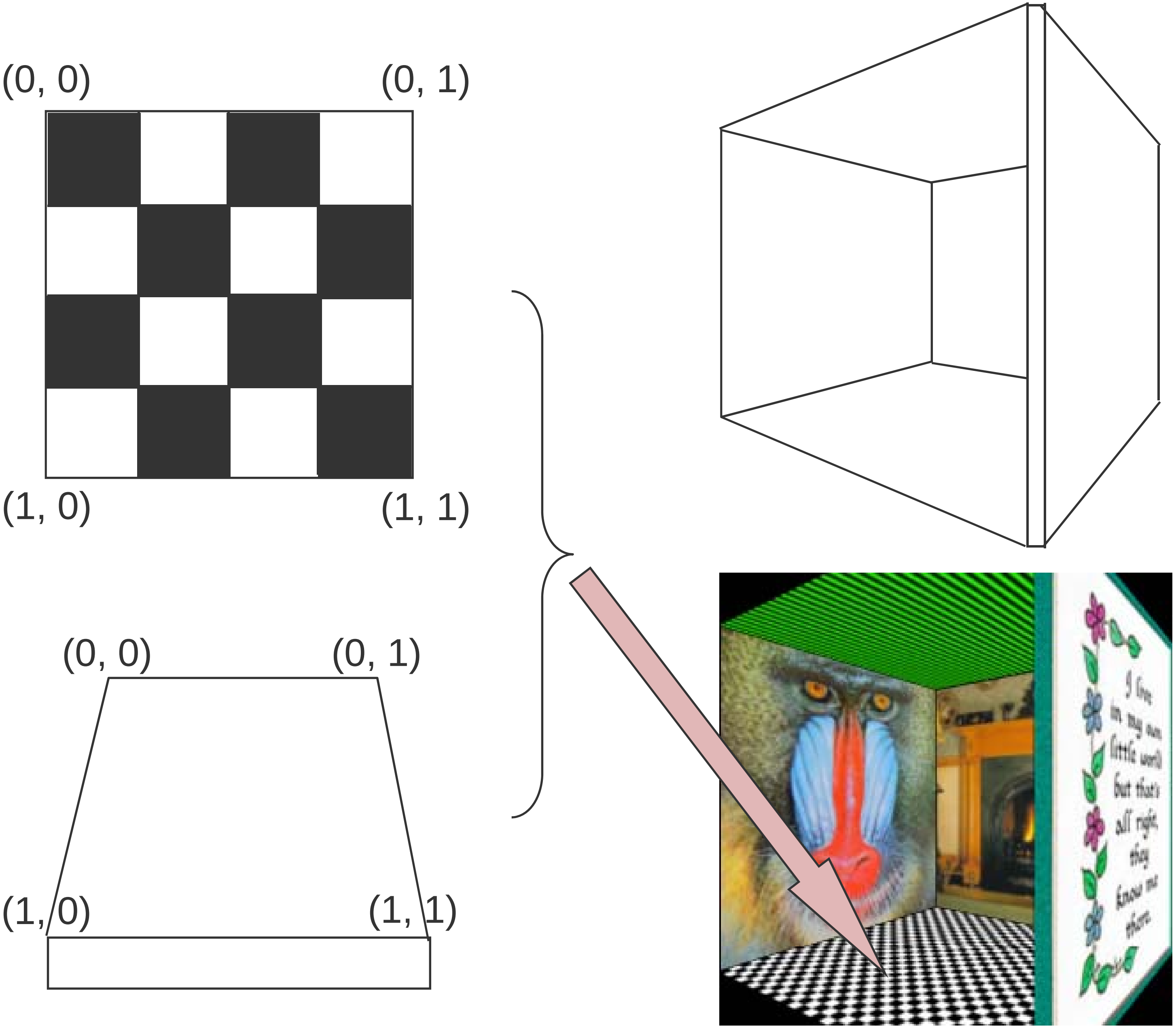
$$(a,b,c,\cdots)\overline{\overline{\wedge}}(a',b',c',\cdots)$$

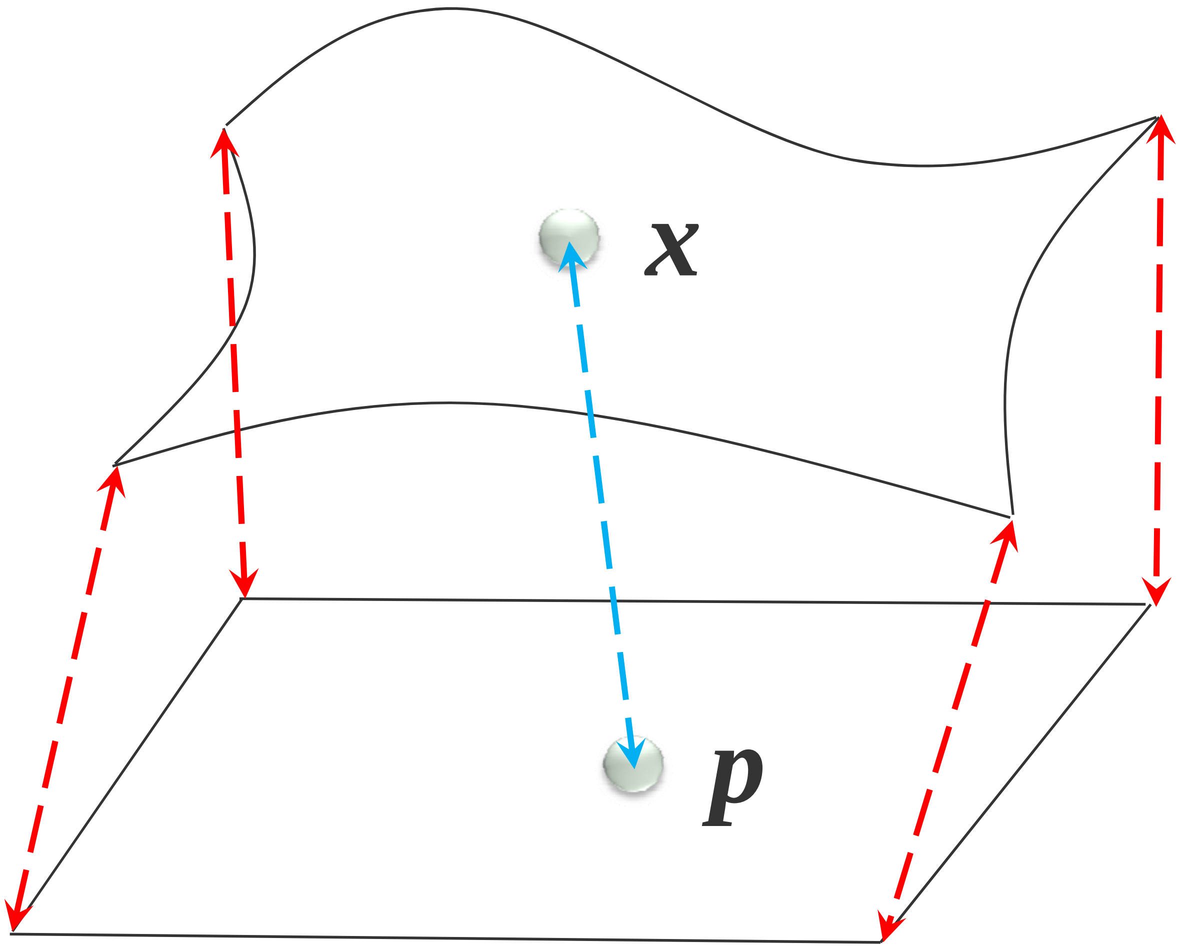


$$\left(A,B,C,\cdots\right)\overline{\overline{\Lambda}}\left(A',B',C',\cdots\right)$$

纹理映射

（texture mapping）

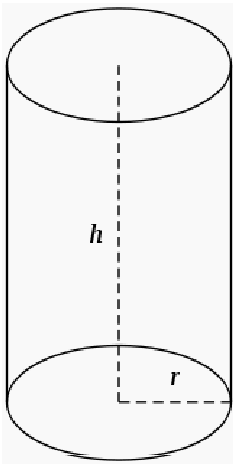

(0, 0)
(0, 1)
(1, 0)
(1, 1)
(0, 0)
(0, 1)
(1, 0)
(1, 1)

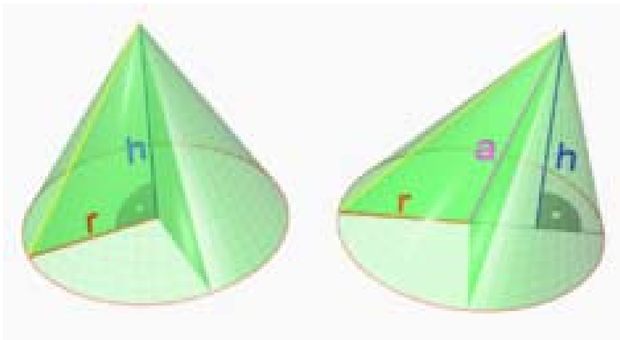


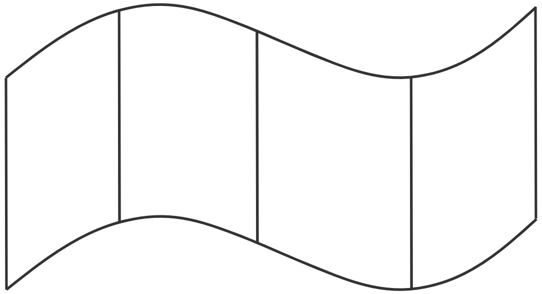
$$f(x) = p$$

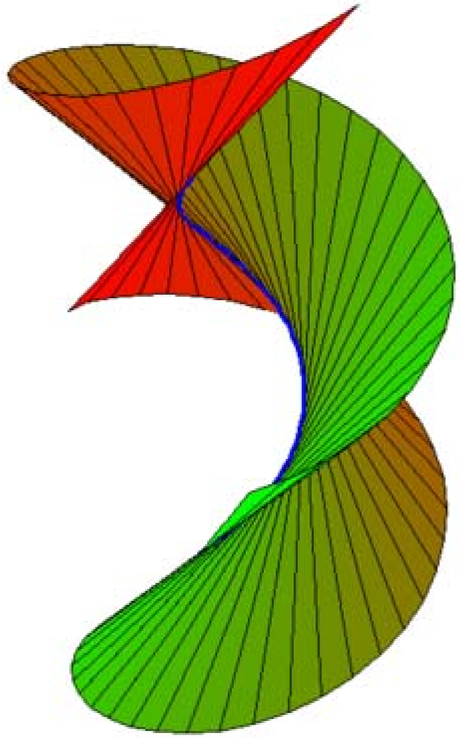
可展曲面：

- 可展曲面是一个有度量的曲面，并且可以无扭曲（即是无伸缩，剪切）地展开到一个平面上。

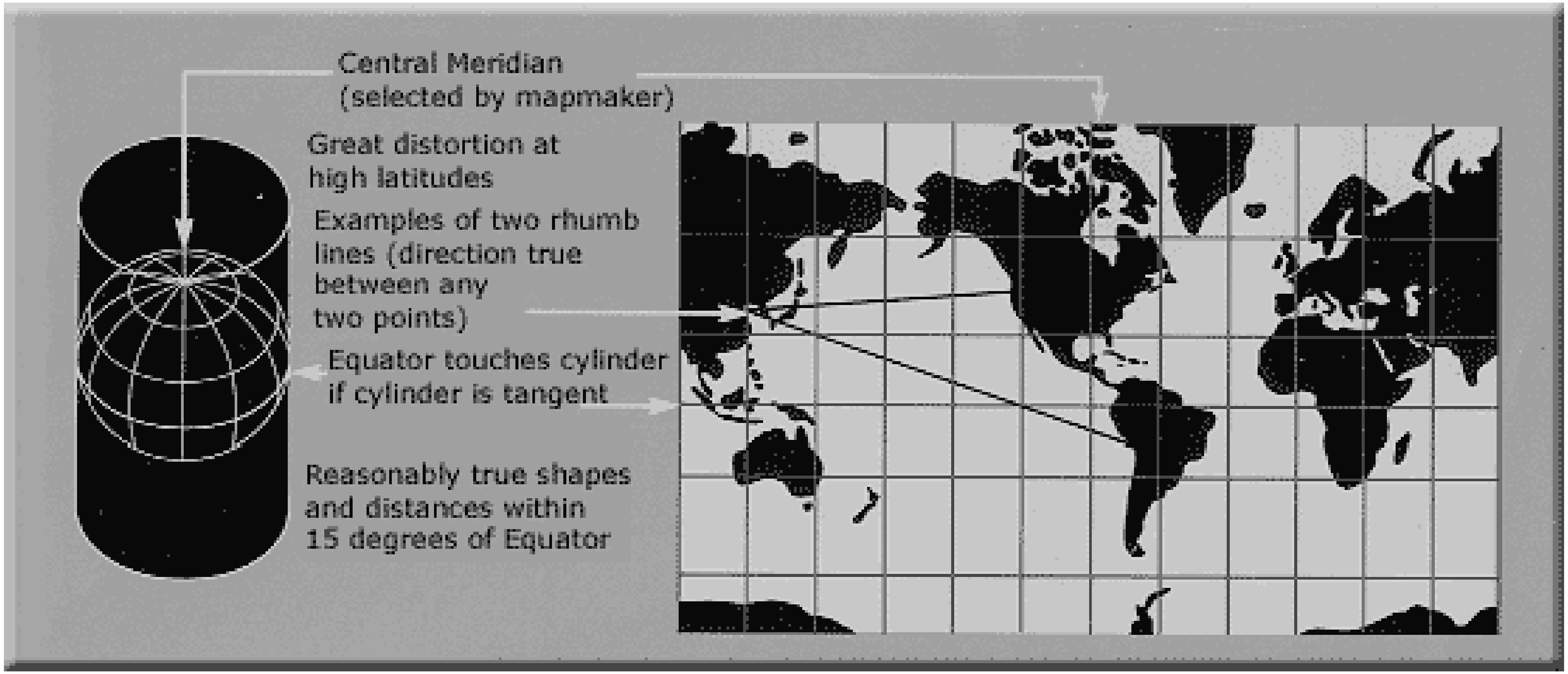






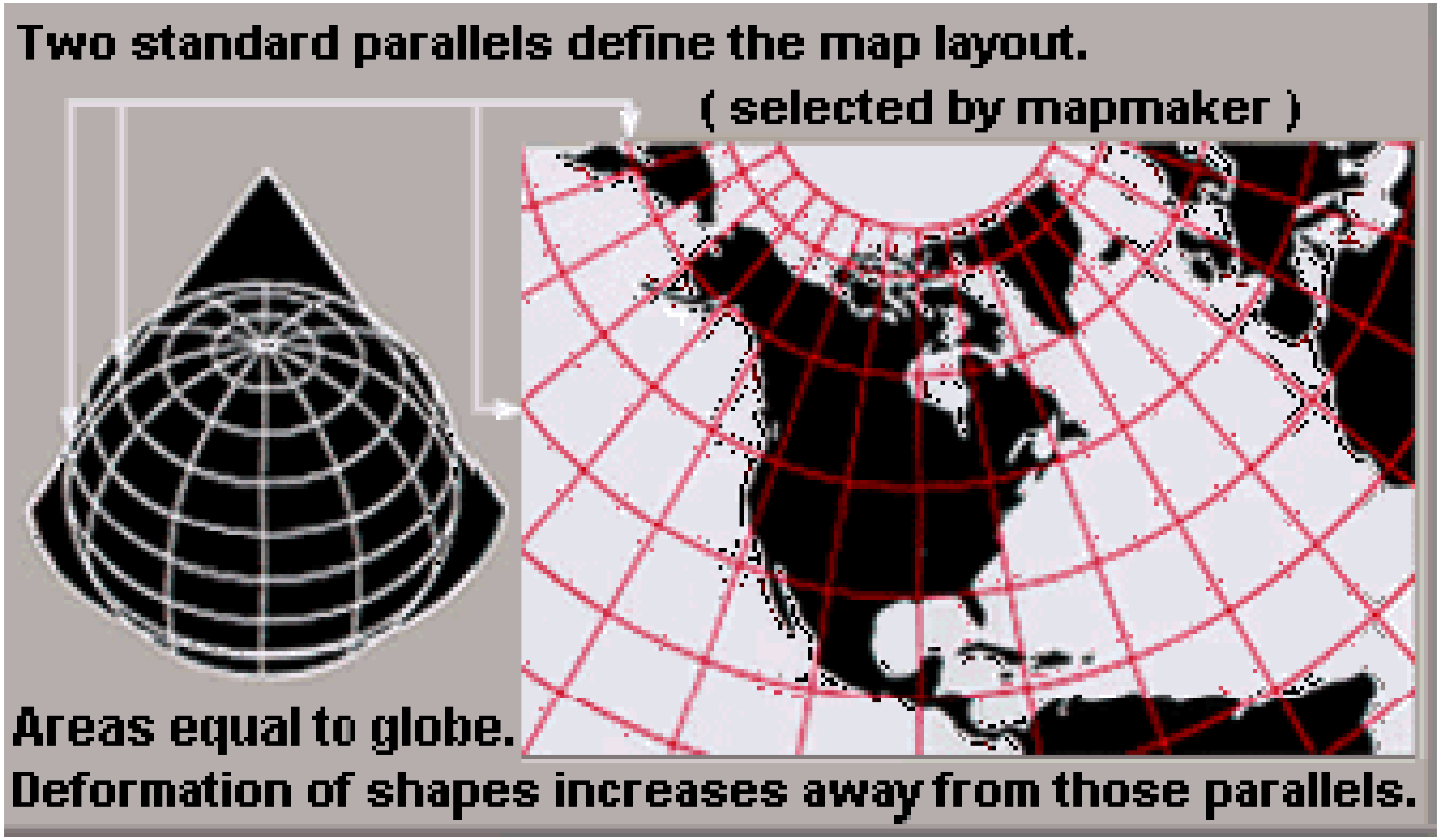


子午线投影（Central Meridian）



赤道附近尺度保持较好，两极变化很大

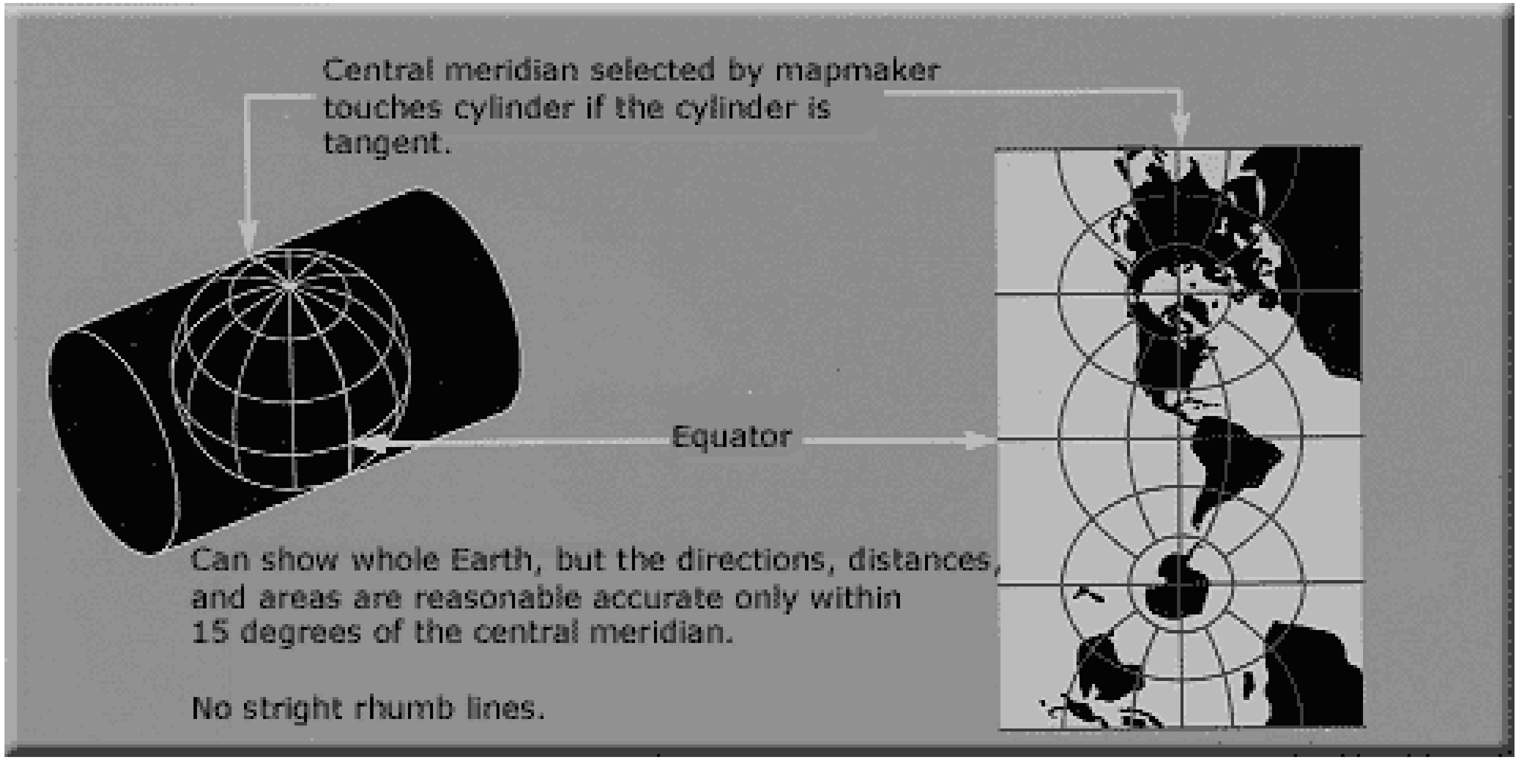
Albers Projection



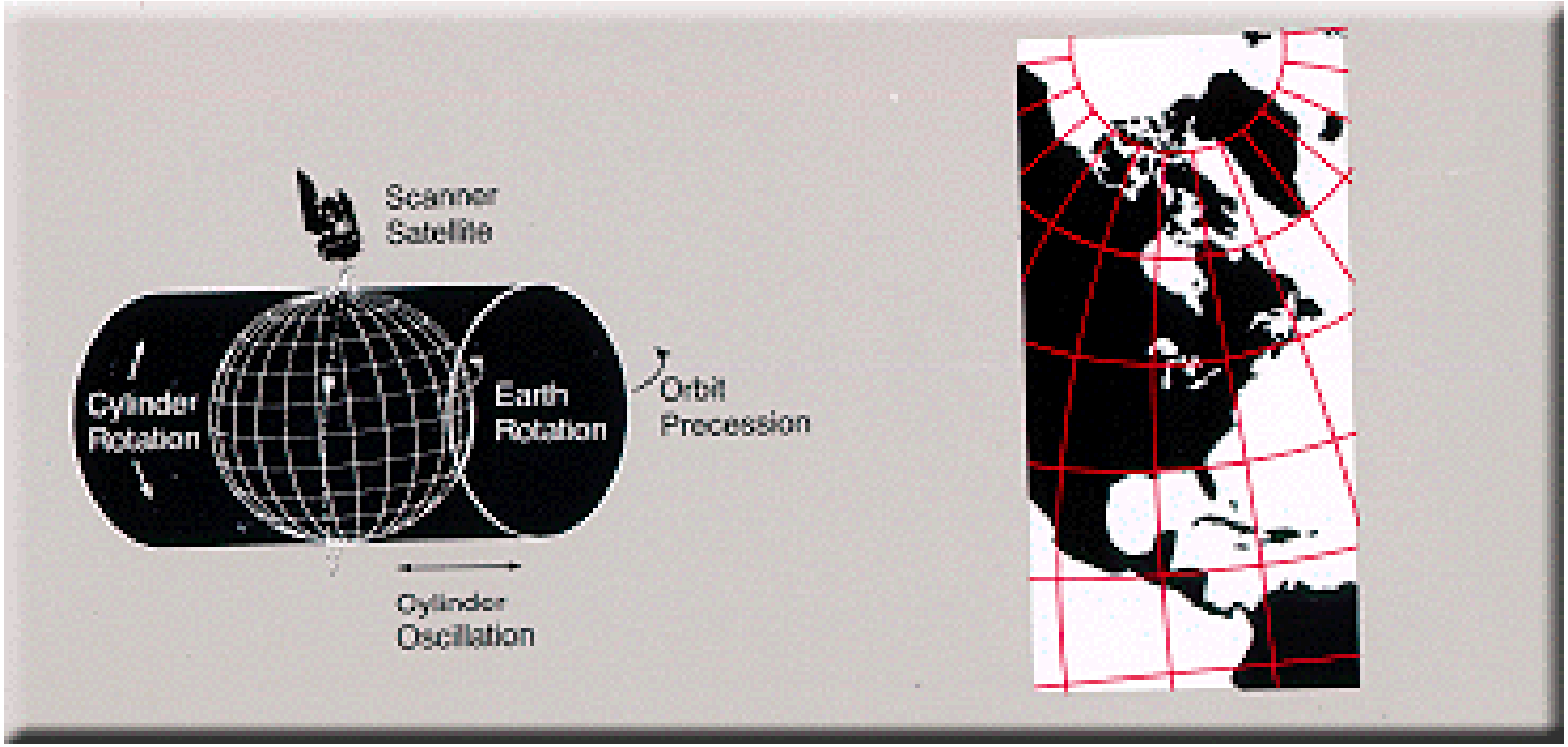
面积尺度保持较好，但形状变化较大

横向子午线投影

（Transverse Meridian Projection）

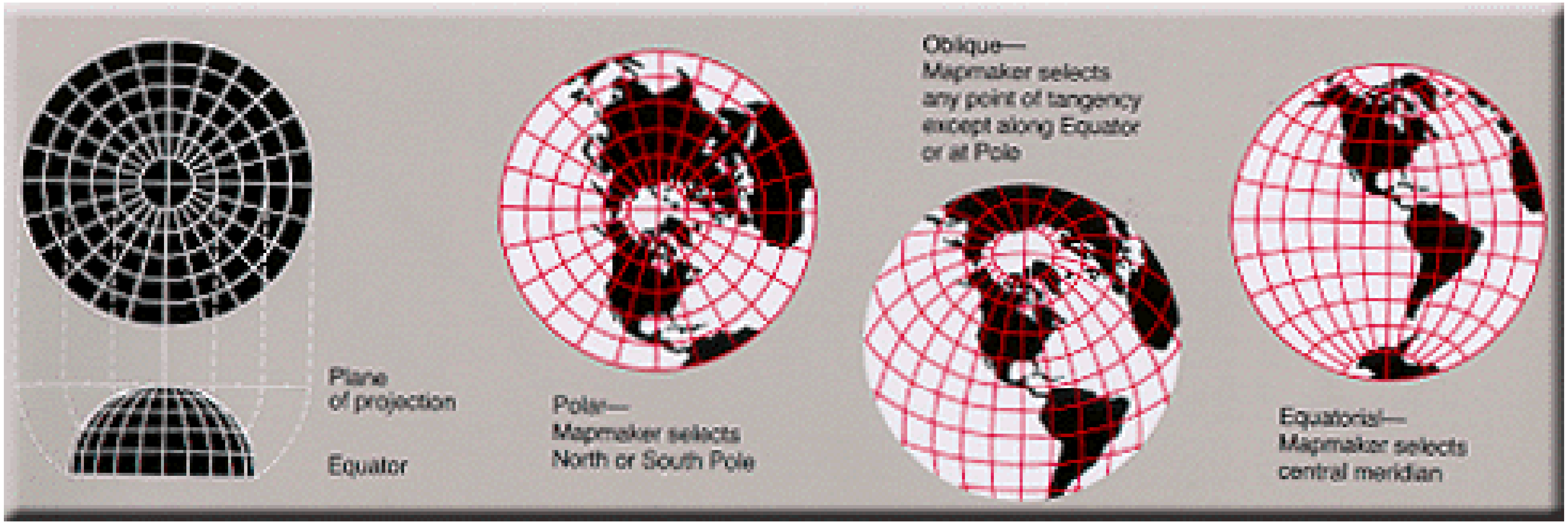


space-oblique Mercator projection



方位投影

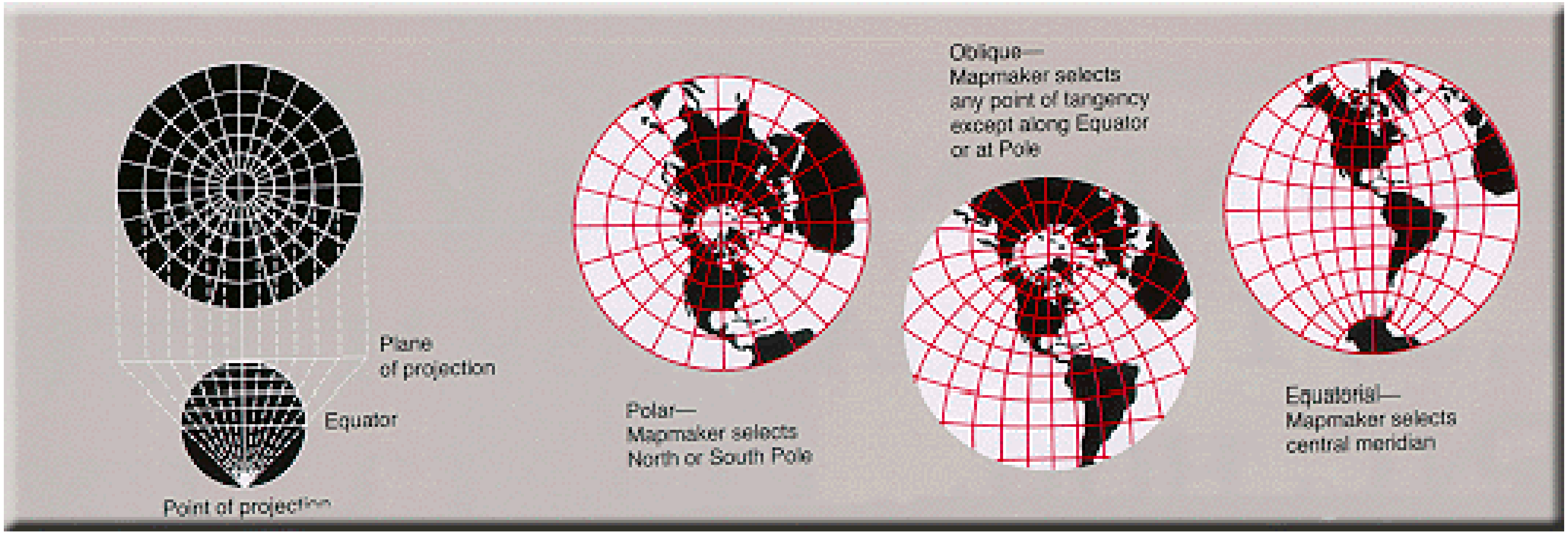
（Azimuthal Projection）



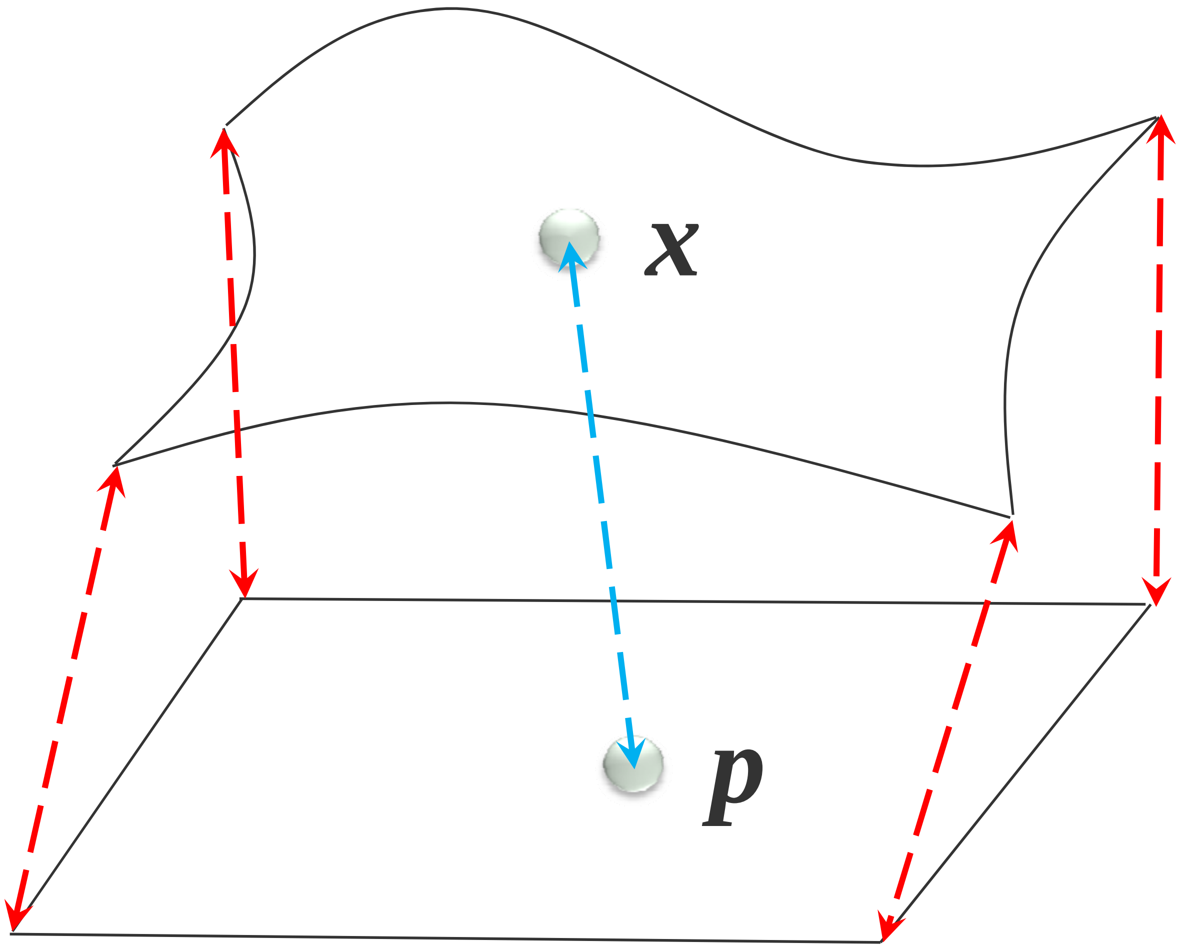
中心点出发的方向保持一致，但形状和尺度变化较大

球面投影（立体投影）

（Stereographic Projection）



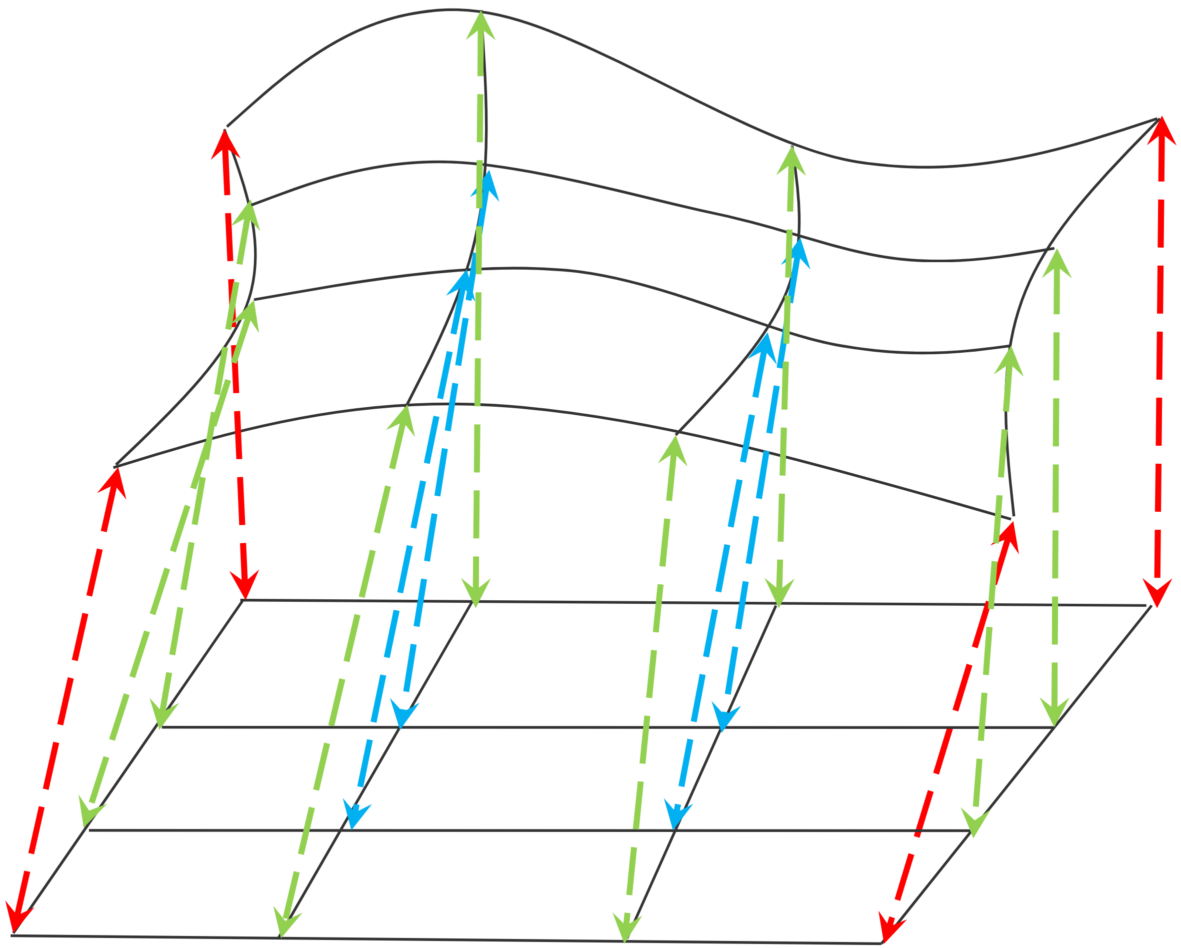
保角度，但不保面积和度量



$$f(x) = p$$

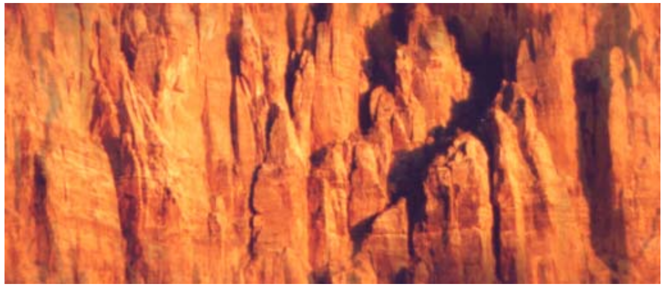
绝大部分曲面都不是可展曲面：

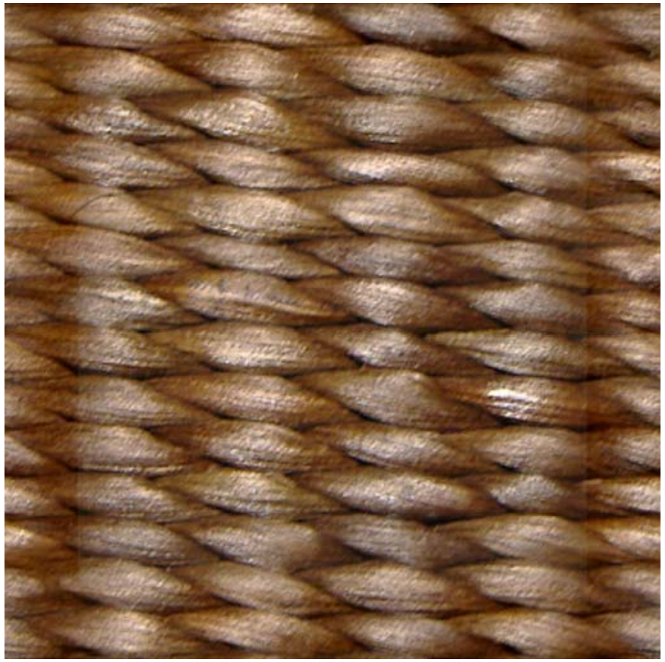
- 一一对应到平面必然引起扭曲等变形

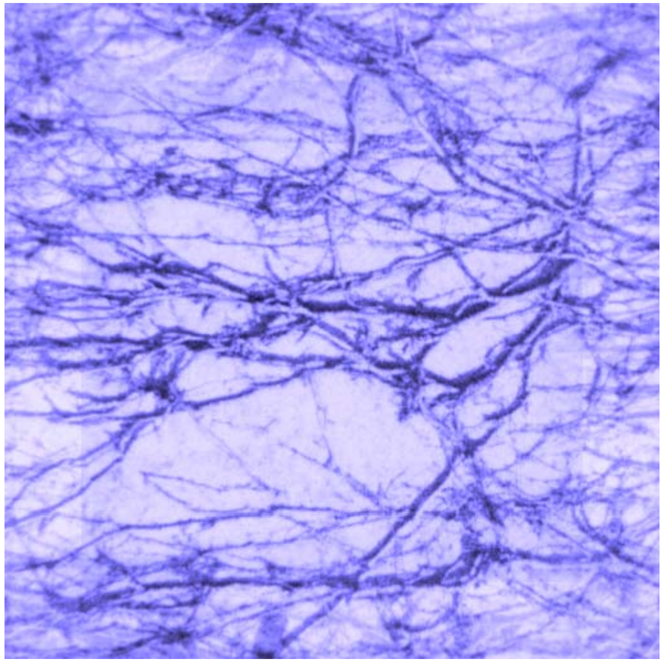


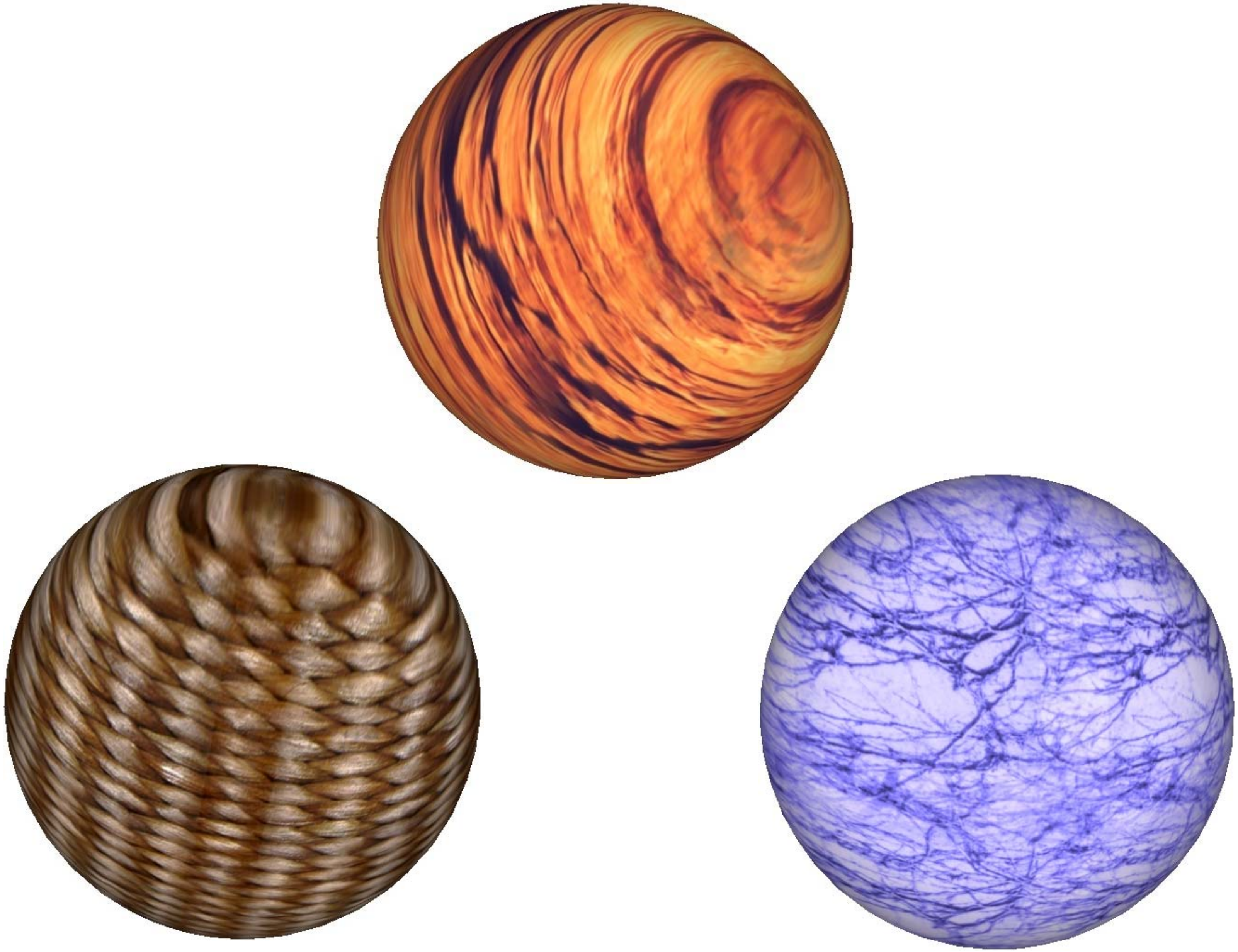
实例分析

- 几何
  - Cylinder
  - Torus
  - Sphere
- 纹理



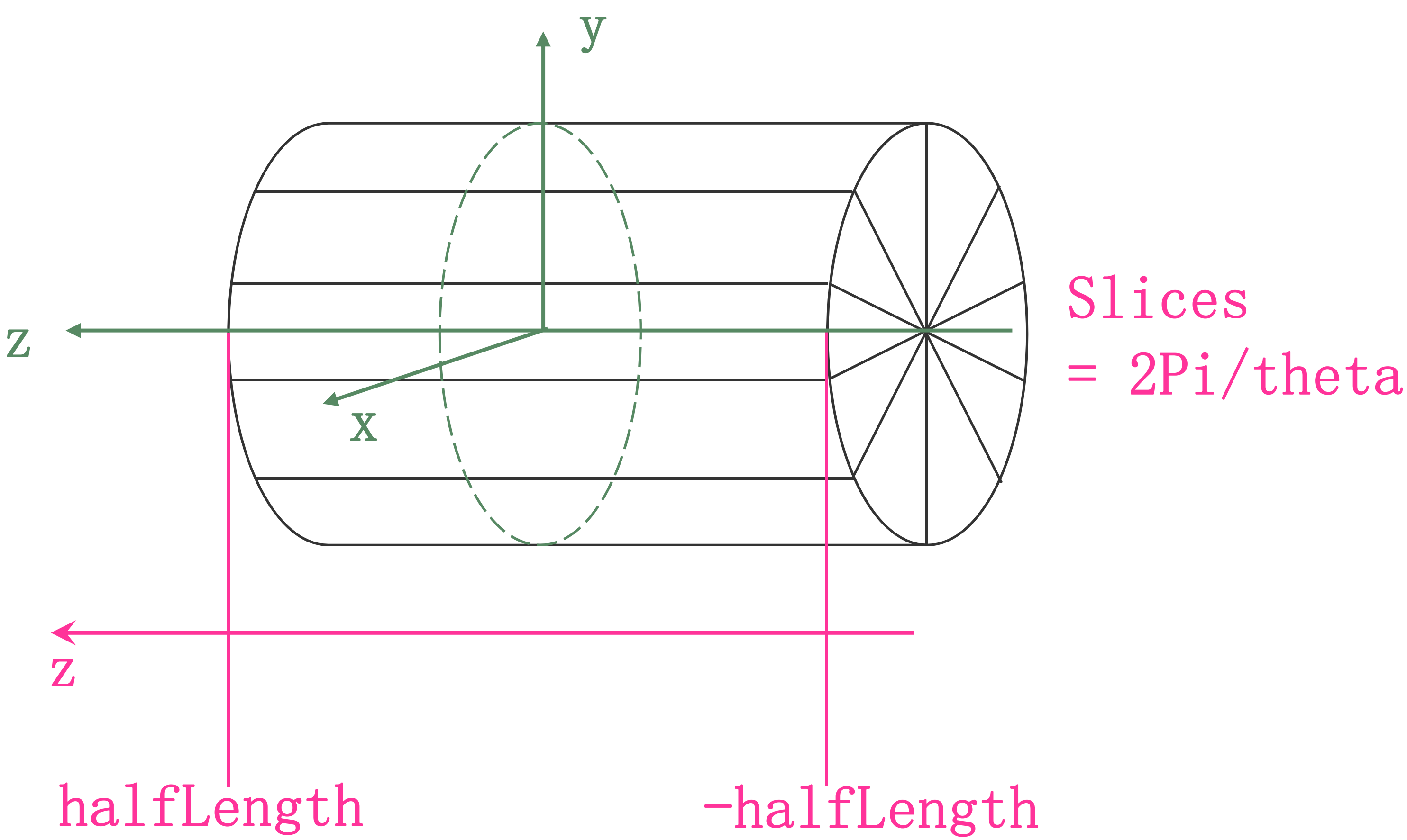




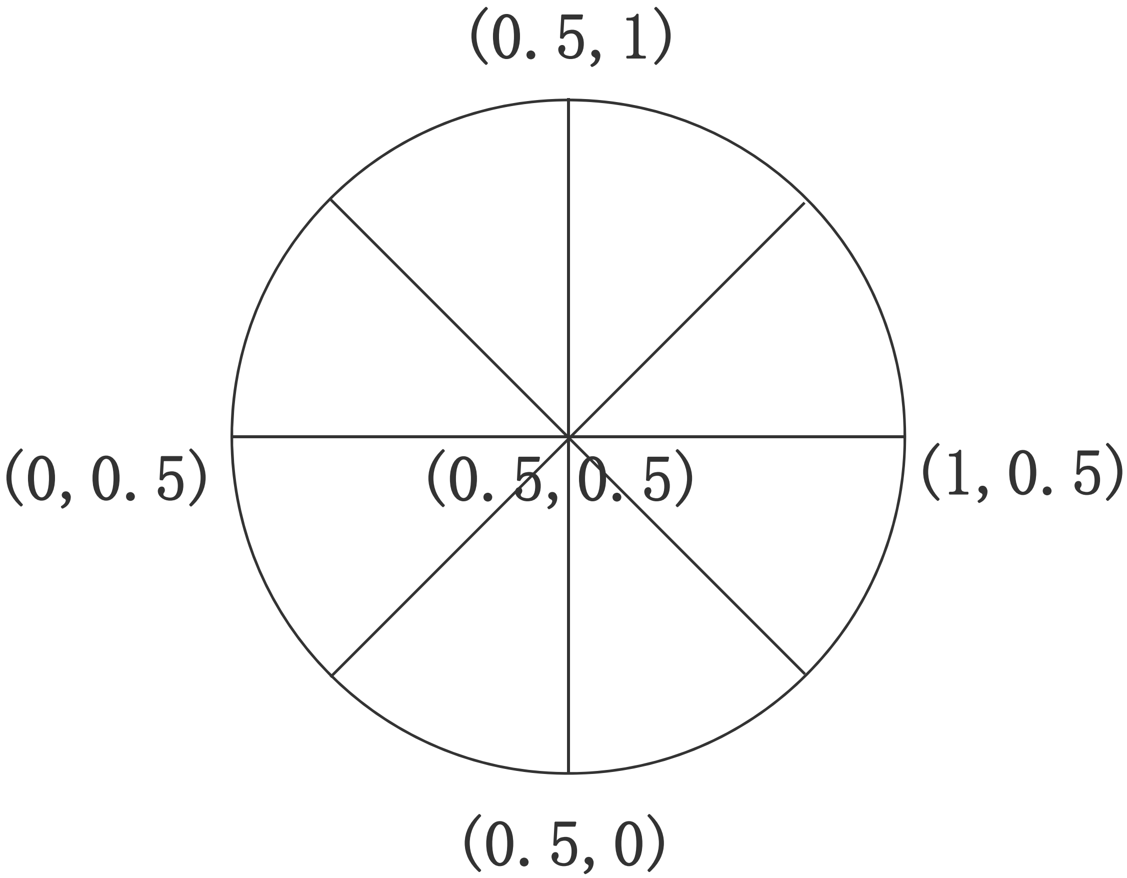


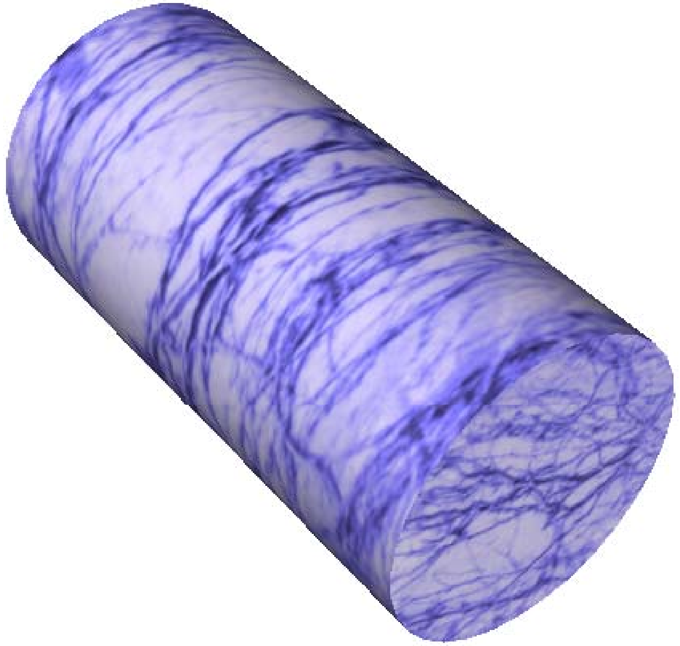
22_texture_mapping_sphere

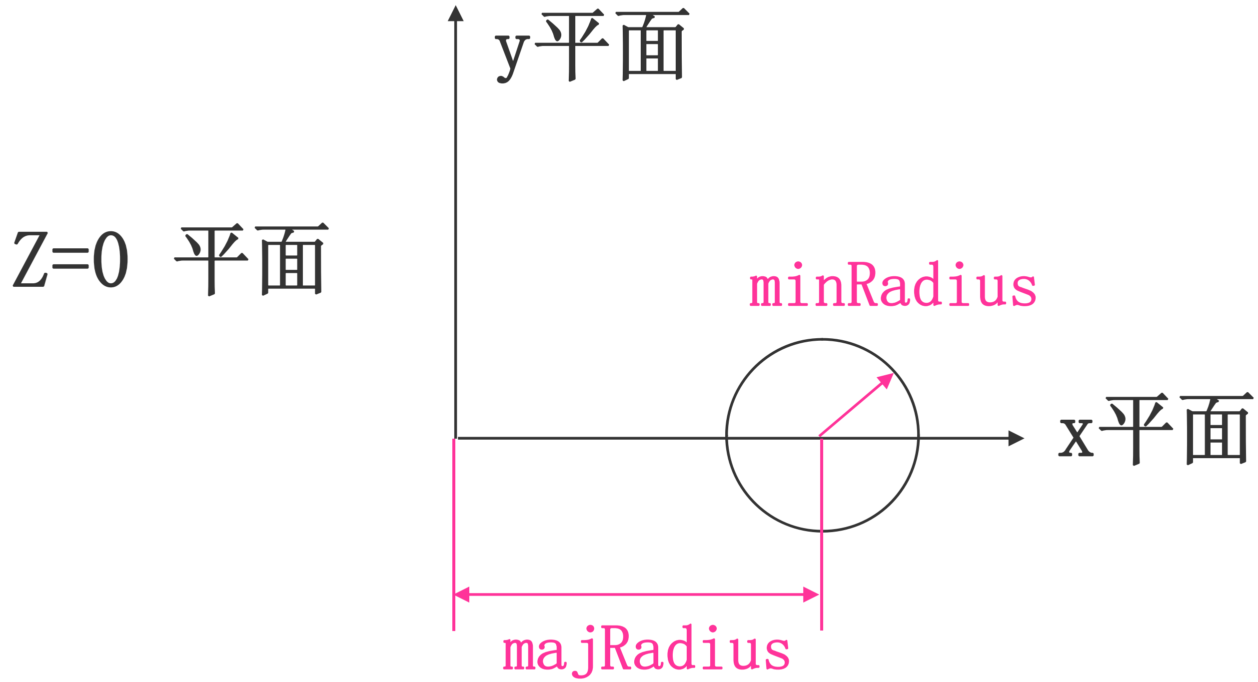
radius = 1.0;　length = 2.0;　slices = 32

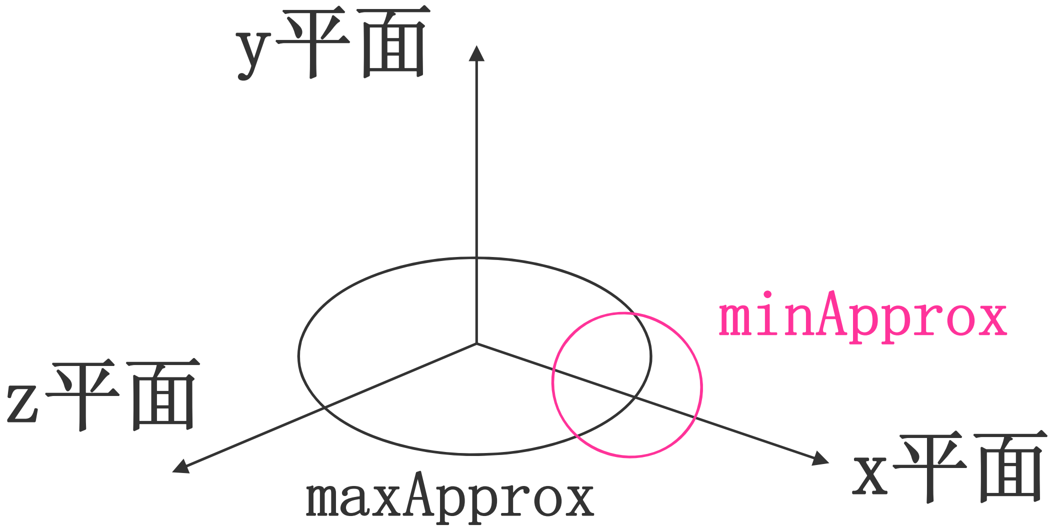


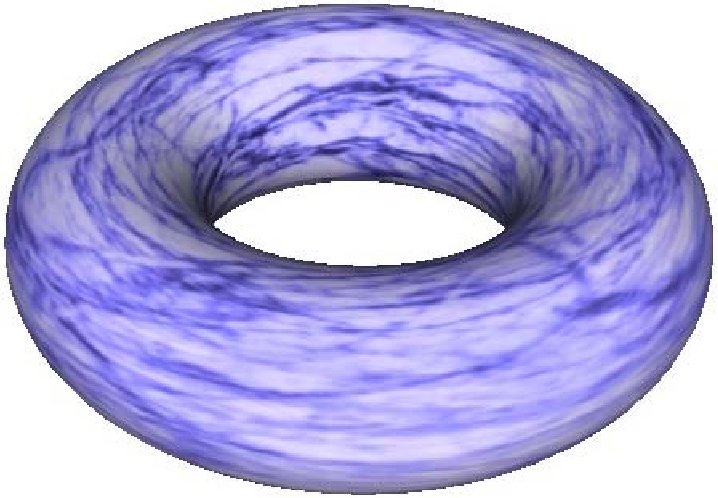

(0, 1)
(0, 0)
y
(1, 0)
(1, 1)
x

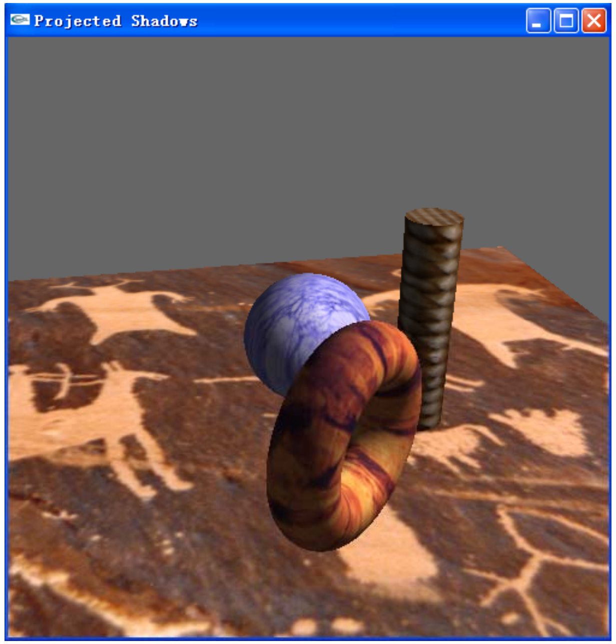

(0.5,1)
(0,0.5)
(0.5,0.5)
(1,0.5)
(0.5,0)

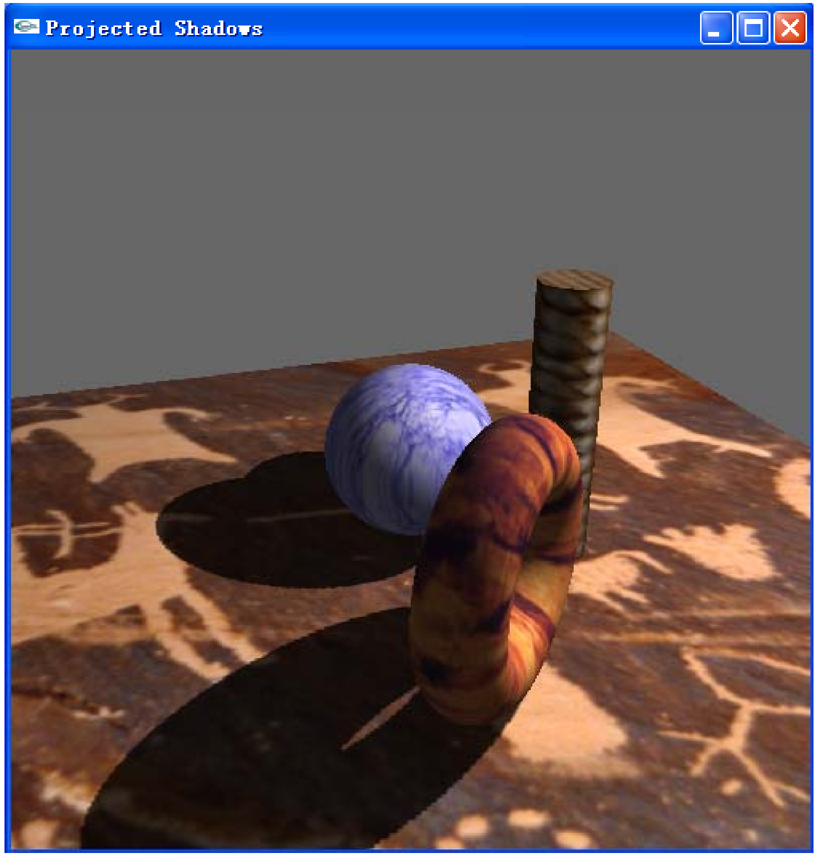


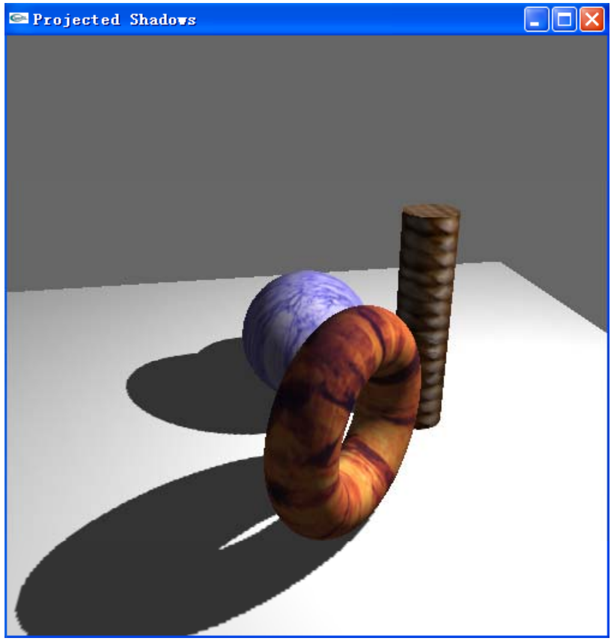

y平面
Z=0 平面
minRadius
x平面
majRadius


y平面
minApprox
z平面
x平面
maxApprox









25_projected_shadows