



第二讲 函数的表示法及分段函数



KE QIAN XUE SHENG DU YU CE

课前学生读与测

读

知识与方法梳理

1. 函数的表示方法

表示函数的常用方法有：解析法、列表法和图象法三种。

(1)解析法：就是用数学表达式表示两个变量之间的对应关系。

(2)列表法：就是列出表格来表示两个变量的函数关系。

(3)图象法：就是用图象表示两个变量之间的关系。



2. 分段函数

若函数在其定义域的不同子集上，因对应关系不同而分别用几个不同的式子来表示，这种函数称为分段函数。

分段函数的定义域等于各段函数的定义域的并集，其值域等于各段函数的值域的并集，分段函数虽由几个部分组成，但它表示的是一个函数。

测

1. (2010 陕西, 5) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x + 1, & x < 1, \\ x^2 + ax, & x \geq 1, \end{cases}$ 若

$f(f(0)) = 4a$, 则实数 a 等于()

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{4}{5}$

C. 2

D. 9

[解析] $f(x) = \begin{cases} 2^x + 1, & x < 1, \\ x^2 + ax, & x \geq 1. \end{cases}$

$\because 0 < 1, \therefore f(0) = 2^0 + 1 = 2.$

$\because f(0) = 2 \geq 1, \therefore f[f(0)] = 2^2 + 2a = 4a,$

$\therefore a = 2.$ 故选 C.

[答案] C

2. (2009 北京) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 3^x, & x \leq 1 \\ -x, & x > 1, \end{cases}$ 若 $f(x)$

$= 2$, 则 $x =$ _____.

[解析] 本题主要考查分段函数和简单的已知函数值求 x 的值. 属于基础知识、基本运算的考查.

$$\text{由} \begin{cases} x \leq 1 \\ 3^x = 2 \end{cases} \Rightarrow x = \log_3 2,$$

$$\begin{cases} x > 1 \\ -x = 2 \Rightarrow x = -2 \end{cases} \text{无解, 故应填 } \log_3 2.$$

[答案] $\log_3 2$

3. 定义在区间 $(-1,1)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $2f(x)-f(-x)=x$,
则 $f(x)$ 的解析式为_____.

[解析] \because 对任意的 $x \in (-1,1)$ 有 $-x \in (-1,1)$,

$$\text{由 } 2f(x)-f(-x)=x \text{ ①}$$

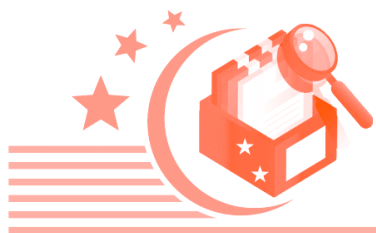
$$\text{得 } 2f(-x)-f(x)=-x \text{ ②}$$

① \times 2+②消去 $f(-x)$,

$$\text{得 } 3f(x)=x$$

$$\therefore f(x)=\frac{x}{3}.$$

[答案] $f(x)=\frac{x}{3}$



KE NEI SHI SHENG JIANG YU XUE

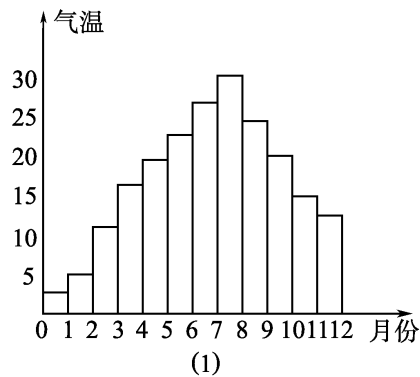
课内师生讲与学

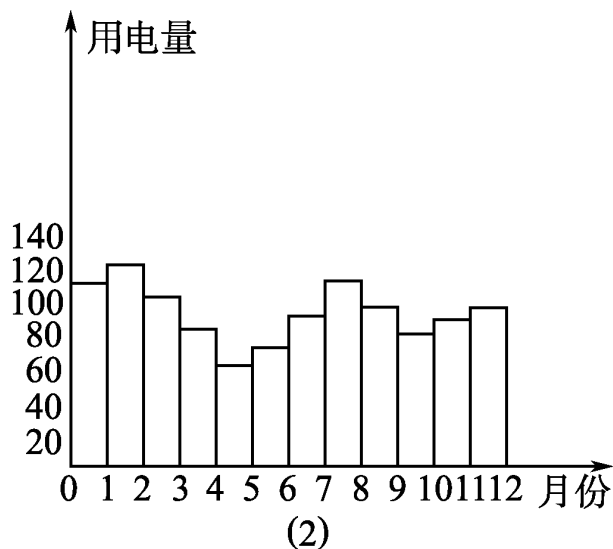
主要题型研究

► 题型 1 函数的图示法及函数的表格表示法

例 1 一般地，家庭用电量(千瓦时)与气温($^{\circ}\text{C}$)有一定的关系，图(1)表示某年12个月中每月的平均气温. 图(2)表示某家庭在这年12个月中每个月的用电量. 根据这些信息，以下关于家庭用电量与气温关系的叙述中，正确的选项是

()





- A. 气温最高时，用电量最多
- B. 气温最低时，用电量最少
- C. 当气温大于某一值时，用电量随气温增高而增加
- D. 当气温小于某一值时，用电量随气温降低而增加



[解析] 本题考查学生对函数的表示方法——图象法的识别与理解能力.

经比较可发现, 2月份用电量最多, 而2月份气温明显不是最高, 因此A项错误; 同理可判断出B项错误, 由5,6,7三个月的气温和用电量可得C项正确.

[答案] C

[点评与警示] 只要把握住图表的特点, 加强对图表的认识和理解能力, 此类问题不难解决.

○ **例 2** (2011·深圳一模) 已知 y 与 $x(x \leq 100)$ 之间的部分对应关

系如下表:

x	11	12	13	14	15	...
y	$\frac{2}{97}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{2}{95}$	$\frac{1}{47}$	$\frac{2}{93}$...

则 x 和 y 可能满足的一个关系式是_____.

[答案] $y = \frac{2}{108-x}$

► 题型 2 分段函数

○ 例 3

在函数 $y = \begin{cases} x+2, & x \leq -1, \\ x^2, & -1 < x < 2, \\ 2x, & x \geq 2 \end{cases}$ 中, 若 $f(x) = 3$, 则 x 的值

是()

- A. 1 B. 1 或 $\frac{3}{2}$ C. $\pm\sqrt{3}$ D. $\sqrt{3}$

[解析] 若 $\begin{cases} x+2=3 \\ x \leq -1 \end{cases}$ 无解；若 $\begin{cases} x^2=3 \\ -1 < x < 2 \end{cases}$ 解得 $x=\sqrt{3}$ ；

若 $\begin{cases} 2x=3 \\ x \geq 2 \end{cases}$ 无解，故选 D.

[答案] D

[点评与警示] 分段函数中的 x 在不同取值时，对应法则不同，不要认为是三个不同的函数.

◆ 变形思考 1

在函数 $y = \begin{cases} x+2 & x \leq -1 \\ x^2 & -1 < x < 2 \\ 2x & x \geq 2 \end{cases}$ 中, 若 $f(x) = 1$, 则 x 的值是

()

A. 1 B. -1 C. ± 1 D. $\frac{1}{2}, \pm 1$

[答案] C

► 题型 3 求函数的解析式

○ 例 4 (人教必修1, P₃₉第6题改编) 已知函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数. 当 $x > 0$ 时, $f(x) = x(1+x)$. 求 $f(x)$ 的解析式.

[解] 要求出 $f(x)$ 的表达式, 还要求出 $x = 0$ 和 $x < 0$ 时的表达式.

当 $x = 0$ 时, 由 $f(x)$ 是奇函数知

$$f(-0) = -f(0), \text{ 即 } 2f(0) = 0, f(0) = 0$$

当 $x < 0$ 时, $-x > 0$. 则

$$f(x) = -f(-x) = -\{(-x)[1 + (-x)]\} = x(1-x)$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} x(1+x) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ x(1-x) & x < 0 \end{cases}$$

[点评与警示] 求分段函数的表达式的基本思想是：“分段求”。要求哪段区间上的表达式，就设 x 属于那个区间。然后再想方设法构造关于 x 的一个式子(如 $-x$, $a-x$, $x+a$ 等)使之属于已知表达出的区间，再求之。

◆ 变形思考2

已知函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上周期为1的函数，且 $x \in [-1, 0]$ 时， $f(x) = x(1+x)$ ，求 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的解析式.

[解] 设 $x \in [0, 1]$ ，则 $x - 1 \in [-1, 0]$

$$f(x - 1) = (x - 1)[1 + (x - 1)] = x(x - 1)$$

$\because f(x)$ 的周期是1， $\therefore -1$ 也是 $f(x)$ 的周期.

$$\therefore f(x) = f(x - 1) = x(x - 1).$$

\therefore 当 $x \in [0, 1]$ 时， $f(x) = x(x - 1)$.

○ **例 5** (2010·广东) 已知函数 $f(x)$ 对任意实数 x 均有 $f(x) = kf(x + 2)$, 其中常数 k 为负数, 且 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上有表达式 $f(x) = x(x - 2)$.

(1) 求 $f(-1)$, $f(2.5)$ 的值;

(2) 写出 $f(x)$ 在 $[-3, 3]$ 上的表达式.

[解] (1) $f(-1) = kf(1) = k(1 - 2) = -k$.

$\therefore f(0.5) = kf(2.5),$

$\therefore f(2.5) = \frac{1}{k}f(0.5) = \frac{1}{k}0.5 \times (0.5 - 2) = -\frac{3}{4k}.$

$$(2) \because \text{对任意实数 } x, f(x) = kf(x+2),$$

$$\therefore f(x-2) = kf(x), \quad \therefore f(x) = \frac{1}{k}f(x-2),$$

$$\text{当 } -3 \leq x < -2 \text{ 时, } 1 \leq x+4 < 2,$$

$$f(x) = kf(x+2) = k^2f(x+4) = k^2(x+4)(x+2)$$

$$\text{当 } -2 \leq x < 0 \text{ 时, } 0 \leq x+2 < 2,$$

$$f(x) = kf(x+2) = kx(x+2);$$

$$\text{当 } 2 \leq x \leq 3 \text{ 时, } 0 \leq x-2 \leq 1,$$

$$f(x) = \frac{1}{k}f(x-2) = \frac{1}{k}(x-2)(x-4).$$



$$\text{故 } f(x) = \begin{cases} k^2(x+4)(x+2), & -3 \leq x < -2, \\ kx(x+2), & -2 \leq x < 0, \\ x(x-2), & 0 \leq x < 2, \\ \frac{1}{k}(x-2)(x-4), & 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

◆ 变形思考3

(2011 广州一模) 已知函数 $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 满足 $f(0) = 0$, 对于任意 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $f(x) \geq x$, 且 $f(-\frac{1}{2} + x) = f(-\frac{1}{2} - x)$, 求函数 $f(x)$ 的表达式.

[解] $\because f(0) = 0, \therefore c = 0.$

\because 对于任意 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $f(-\frac{1}{2} + x) = f(-\frac{1}{2} - x),$

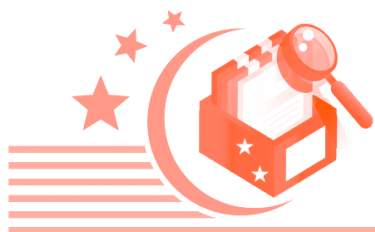
\therefore 函数 $f(x)$ 的对称轴为 $x = -\frac{1}{2}$, 即 $-\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}$, 得 $a = b$.

又 $f(x) \geq x$, 即 $ax^2 + (b-1)x \geq 0$ 对于任意 $x \in \mathbf{R}$ 都成立,

$\therefore a > 0$, 且 $\Delta = (b-1)^2 \leq 0$.

$\therefore (b-1)^2 \geq 0$, $\therefore b = 1$, $a = 1$.

$\therefore f(x) = x^2 + x$.



JIE TI JING YAN GONG XIANG

解题经验共享



1. 分段函数是指不能用一个统一解析式表示的函数，它只是一个函数，而不是几个函数．解决分段函数问题的基本思想是：分段解决，综合结论．要注意 x 的范围所对应的关系式．不要把式子搞错．

2. 函数的三种表示形式各有利弊，一般情况下研究函数要求出函数的解析式，通过解析式来解决问题．



KE WAI XUE SHENG LIAN YU WU

课外学生练与悟