第五讲　指数与指数函数

KE QIAN XUE SHENG DU YU CE

课前学生读与测

读 知识与方法梳理

1．指数的概念及运算性质

(1)如果 $x^n=a$，那么 x 叫做 a 的 n 次方根．其中 $n>1$，且 $n\in\mathbf{N}^*$.

(2)当 n 为奇数时 $\sqrt[n]{a^n}=$ ___a___，当 n 为偶数时 ______________

______________．

(3)分数指数幂

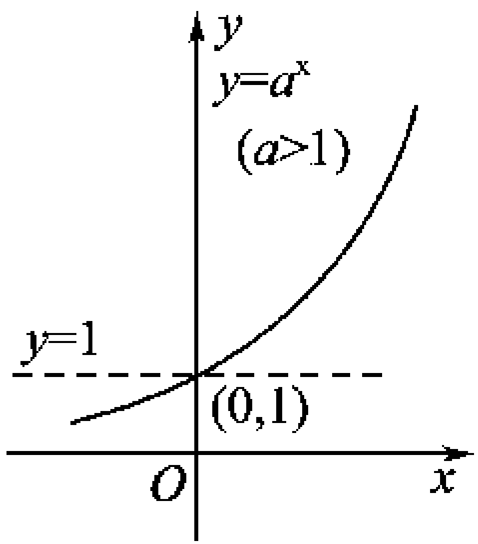
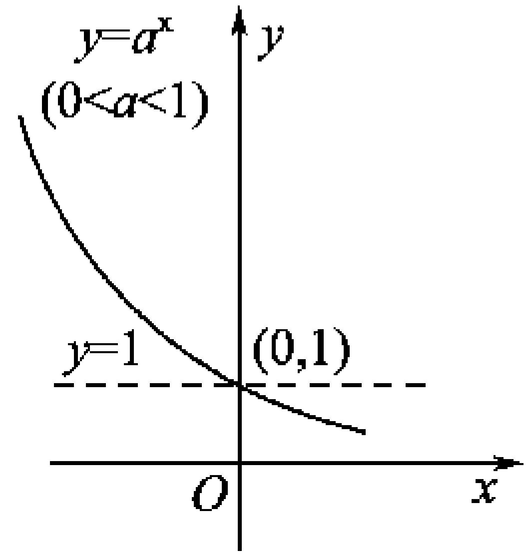
①规定正数的正分数指数幂的意义是 $a^{\frac{m}{n}}=$______

______.

②正数的负分数指数幂的意义与负整数指数幂的意义相仿，规定：$a^{-\frac{m}{n}}=$______.0 的正分数指数幂等于 0,0 的负分数指数幂没有意义.

$a^{r+s}(a>0，r，s\in\mathbf{Q})$ $a^{rs}(a>0，$

- (4)分数指数幂的运算性质 $r, s\in\mathbf{Q})$ $a^{r}b^{r}(a>0，b>0，r\in\mathbf{Q})$
- ①$a^{r}\cdot a^{s}=$________________；②$(a^{r})^{s}=$______________③$(ab)^{r}=$____________________.

<table>
<tr><td></td><td>$a>1$</td><td>$0<a<1$</td></tr>
<tr><td>图象</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

	$a>1$	$0<a<1$
性质	(1)定义域：$(-\infty，+\infty)$	(1)定义域：$(-\infty，+\infty)$
	(2)值域：$(0，+\infty)$	(2)值域：$(0，+\infty)$
	(3)过点$(0,1)$，即$x=0$时，$y=1$	(3)过点$(0,1)$，即$x=0$时，$y=1$
	(4)当$x>0$时，$y>1$；$x<0$时，$0<y<1$	(4)当$x>0$时，$0<y<1$；$x<0$时，$y>1$
	(5)是$(-\infty，+\infty)$上的增	(5)是$(-\infty，+\infty)$上的减

测

1. (2009 **江苏**)已知 $a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，函数 $f(x)=a^x$，若实数 m、n 满足 $f(m)>f(n)$，则 m、n 的大小关系为________.

[解析]　考查指数函数的单调性.

$a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\in(0,1)$，函数 $f(x)=a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上递减.

由 $f(m)>f(n)$得：$m<n$

❖ [答案]　$m<n$

2．若函数 $f(x)=a^{|x|}(a>0，a\neq 1)$，满足 $f(1)=\frac{1}{9}$，则 $f(x)$ 的单调递减区间是________．

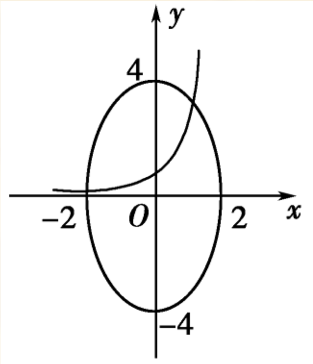
[解析]　由 $f(1)=\frac{1}{9}$，得 $a=\frac{1}{9}$，

所以 $f(x)=(\frac{1}{9})^{|x|}=\begin{cases}(\frac{1}{9})^{x} & x\geq 0\\ 9^{x} & x<0\end{cases}$

因此 $f(x)$在$[0，+\infty)$单调递减．

❖ [答案]　$[0，+\infty)$

3. (2010 湖北, 2)设集合 $A=\{(x, y)|\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1\}$, $B=\{(x, y)|y=3^x\}$，则 $A\cap B$ 的子集的个数是(　　)



A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

- [解析]　集合A中的元素是焦点在y轴上的椭圆上的所有点，集合B中的元素是指数函数 $y=3^x$ 图象上的所有点，作图可知 $A\cap B$ 中有两个元素，∴$A\cap B$ 的子集的个数是 $2^2=4$ 个，故选D.
- [答案]　D

KE NEI SHI SHENG JIANG YU XUE

课内师生讲与学

主要题型研究

题型 1　指数式的运算

例 1　化简或求值：

(1) $\dfrac{\sqrt{a^{3}b^{2}\sqrt[3]{ab^{2}}}}{(a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}})^{4}a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}(a>0，b>0)$；

(2) $(\dfrac{1}{4})^{-\frac{1}{2}}\dfrac{(\sqrt{4ab^{-1}})^{3}}{(0.1)^{-2}(a^{3}b^{-3})^{\frac{1}{2}}}(a>0，b>0)$.

❖ [分析]　利用指数幂的运算性质.

[解]　(1)原式$=\dfrac{(a^3b^2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}}{ab^2a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}$

$=a^{\frac{3}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}-1}b^{1+\frac{1}{3}-2-\frac{1}{3}}=ab^{-1}$.

(2)原式$=\dfrac{4^{\frac{1}{2}}\cdot 4^{\frac{3}{2}}}{10^2}a^{\frac{3}{2}}a^{-\frac{3}{2}}b^{-\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{2}}$

$=\dfrac{4}{25}a^0b^0=\dfrac{4}{25}$.

❖ [点评与警示]　根式的运算常常化成幂的运算来进行，计算结果如果没有特殊要求，就用分数指数幂的形式表示.

◆变形思考1

(1)$\sqrt{a^{-4}b^{2}\sqrt[3]{ab^{2}}}$$(a>0，b>0)$；

(2)$[125^{\frac{2}{3}}+(\frac{1}{16})^{-\frac{1}{2}}+343^{\frac{1}{3}}]^{\frac{1}{2}}$；

(3)已知$a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=4$，求下列各式的值：

①$a+a^{-1}$；　②$\dfrac{a^{\frac{3}{2}}-a^{-\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}$

[解]　(1)原式$=a^{-\frac{4}{2}}b^{\frac{2}{2}}(a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}=a^{-2}ba^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{3}}=a^{-\frac{11}{6}}b^{\frac{4}{3}}$.

(2)原式$=[(5^3)^{\frac{2}{3}}+(4^2)^{\frac{1}{2}}+(7^3)^{\frac{1}{3}}]^{\frac{1}{2}}=(5^2+4+7)^{\frac{1}{2}}=36^{\frac{1}{2}}=6$.

(3)①$a+a^{-1}=(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^2-2=4^2-2=14$.

②利用①的结果，

$$\text{原式}=\frac{(a^{\frac{1}{2}})^3-(a^{-\frac{1}{2}})^3}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})(a+1+a^{-1})}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}$$

$$=a+a^{-1}+1=14+1=15.$$

题型2 比较大小

例2 比较下列各组数的大小：

(1)$0.8^{0.5}$与$0.9^{0.4}$；(2)$4^{0.9}$,$8^{0.48}$，$(\frac{1}{2})^{-1.5}$.

- [分析] 比较大小题，可考虑函数的单调性或与特殊值比较，以确定大小．

[解]　(1)$\because 0.8^{0.5}<0.9^{0.5}$，又 $0.9^{0.5}<0.9^{0.4}$，

$\therefore 0.8^{0.5}<0.9^{0.4}$.

(2)$\because 4^{0.9}=2^{1.8}, 8^{0.48}=2^{1.44}$，$(\frac{1}{2})^{-1.5}=2^{1.5}$，

又 $y=2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数，

$\therefore 2^{1.8}>2^{1.5}>2^{1.44}$.

$\therefore 4^{0.9}>(\frac{1}{2})^{-1.5}>8^{0.48}$.

❖ [点评与警示]　1.题为“搭桥”法，即当两个数不好比较大小时，可找到一个与题中两个

◆变形思考2

比较下列各组数的大小：

(1)$(\frac{1}{2})^{-\pi}$与$3^{-\sqrt{2}}$；(2)$0.7^{-\frac{1}{3}}$，$1.9^{-\frac{2}{3}}$，$1.9^{-\frac{3}{4}}$.

[解]　(1)$\because \frac{1}{2}<1$，$-\pi<0$，

$\therefore (\frac{1}{2})^{-\pi}>1$；

又$3>1$，$-\sqrt{2}<0$，

$\therefore 3^{-\sqrt{2}}\in(0,1)$，

$\therefore (\frac{1}{2})^{-\pi}>3^{-\sqrt{2}}$.

(2)考查指数函数 $y=1.9^x$，由于 $1.9>1$，所以函数 $y=1.9^x$ 在$(-\infty，+\infty)$上是增函数.

因为$-\frac{3}{4}<-\frac{2}{3}<0$，所以 $0<1.9^{-\frac{3}{4}}<1.9^{-\frac{2}{3}}<1$.

考查指数函数 $y=0.7^x$，由于 $0<0.7<1$，

所以函数 $y=0.7^x$ 在$(-\infty，+\infty)$上是减函数.

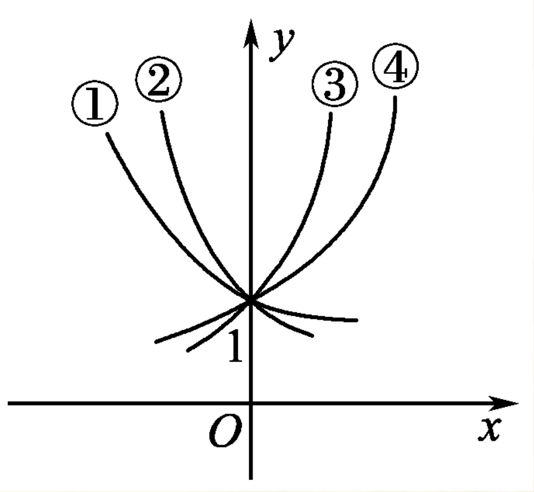
又因为$-\frac{1}{3}<0$，所以 $0.7-\frac{1}{3}>1$.

故它们的大小关系是 $0.7-\frac{1}{3}>1.9^{-\frac{2}{3}}>1.9^{-\frac{3}{4}}$.

题型3 指数函数的图象及性质的应用

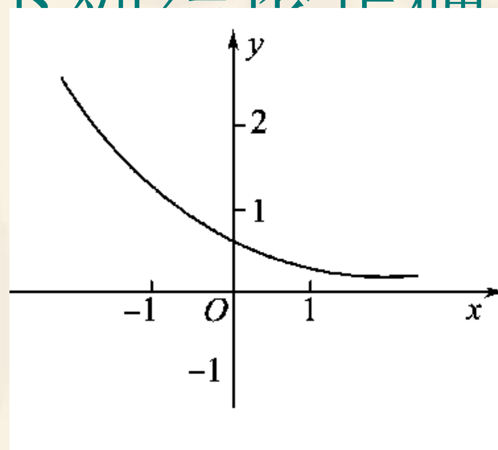
例3 如图是指数函数①$y=a^x$，②$y=b^x$，③$y=c^x$，④$y=d^x$的图象，则a，b，c，d与1的大小关系是(　　)

- A．$a<b<1<c<d$
- B．$b<a<1<d<c$
- C．$1<a<b<c<d$
- D．$a<b<1<d<c$



- [解析]　根据图象直观可先分两类，③、④的底数一定大于1，①、②的底数小于1，再由③④中比较c、d的大小，由①②中比较a、b的大小.
- 解法一：当指数函数底数大于1时，图象上升，且底数越大时图象向上越靠近于y轴，当底数大于0小于1时，图象下降，底数越小，图象向右越靠近于x轴. ∴应选B.
- 解法二：令$x=1$，由图知$c^1>d^1>a^1>b^1$，∴$b<a<1<d<c$.故选B.

变形思考3 函数$f(x)＝a^{x-b}$的图象如图所示，其中a、b为常数，则下列结论正确的是(　　)



- A．$a>1$，$b<0$
- B．$a>1$，$b>0$
- C．$0<a<1$，$b>0$
- D．$0<a<1$，$b<0$
- [解析]　结合图象知，函数是减函数，所以$0<a<1$，又分析得，图象是由$y=a^x$的图象向右平移所得，故$-b>0$，即$b<0$，故选D.

例 4 函数 $y=a^x$ 在[0,1]上的最大值与最小值的和为 3，则 a 的值为(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B．2

C．4　　D. $\frac{1}{4}$

❖ [分析]　本题主要考查指数函数的基本性质灵活运用基本性质的能力.

- [解]　解法一：对a分类讨论.
- $a>1$，$x=0$时，y有最小值1；$x=1$时，y有最大值a.由题设$1+a=3$，则$a=2$.
- $0<a<1$，$x=0$时，y有最大值1；$x=1$时，y有最小值a，由题设$a+1=3$，则$a=2$，与$0<a<1$矛盾，故选B.
- **解法二：**当$a>0$，$a\neq1$时，$y=a^x$是定义域上的单调函数，因此其最值在$x\in[0,1]$的两个端点得到，于是必有$1+a=3$，$a=2$.
- [答案]　B

◆变形思考4

- (2008·广州二模)设函数$f(x)=a^{-|x|}(a>0$且$a\neq1)$，$f(2)=4$，则(　　)
- A．$f(-2)>f(-1)$　　B．$f(-1)>f(-2)$
- C．$f(1)>f(2)$　　D．$f(-2)>f(2)$

[解析]　由$f(2)=4$，得$4=a^{-2}\Rightarrow a=\frac{1}{2}$.所以函数$f(x)=(\frac{1}{2})^{-|x|}=2^{|x|}$.该函数在$(-\infty，0]$上是减函数，故有$f(-2)>f(-1)$．选A.

[答案]　A

题型4　指数函数的综合问题

例5　已知 $f(x)=\dfrac{a^x-1}{a^x+1}(a>0且a\neq 1)$.

(1)求 $f(x)$ 的定义域、值域；

(2)讨论 $f(x)$ 的奇偶性；

(3)讨论 $f(x)$ 的单调性.

❖ [分析]　由函数结构定义分析满足的条件，进一步应用指数函数的性质分析，奇偶性判断按其定义进行.

[解]　(1)定义域 **R**,

$f(x)=1-\dfrac{2}{a^x+1}$, 因为 $a^x>0$, 所以 $a^x+1>1$.所以 $0<\dfrac{2}{a^x+1}<2$.

所以 $-1<1-\dfrac{2}{a^x+1}<1$.所以值域为$(-1,1)$.

(2)$f(-x)=\dfrac{a^{-x}-1}{a^{-x}+1}=\dfrac{1-a^x}{1+a^x}=-f(x)$，所以 $f(x)$为奇函数.

(3)设 $x_1<x_2$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{ax_1-1}{ax_1+1}-\dfrac{ax_2-1}{ax_2+1}$

$=\dfrac{2(ax_1-ax_2)}{(ax_1+1)(ax_2+1)}$.

当 $a>1$ 时，由 $x_2>x_1$，得 $ax_1<ax_2$，$ax_1+1>0$，$ax_2+1>0$，

所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$，所以 $f(x_1)<f(x_2)$，

所以当 $a>1$ 时 $f(x)$在 **R** 上为增函数，

同理，当 $0<a<1$ 时 $f(x)$在 **R** 上为减函数.

- **[点评与警示]** 问题(1)首先用分离常数的方法化简$f(x)$的表达式，然后求值域；问题(3)的单调性证明的关键是熟悉指数幂的代数变形．同时注意到指数函数的性质直接受到底数a取值范围的影响，因此，求解时需要对a进行分类讨论.

◆变形思考5

设 $a\in\mathbf{R}$，$f(x)=\dfrac{a\cdot 2^x+a-2}{2^x+1}(x\in\mathbf{R})$为奇函数．

(1)确定 a 的值；

(2)函数 $f(x)$是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，还是减函数？试证明你的结论．

[解]　(1)$f(x)$为奇函数，$x\in\mathbf{R}$，

$\therefore f(0)=0$，即$\dfrac{a\cdot 2^0+a-2}{2^0+1}=0$，$\therefore a=1$

(2)由(1)知 $f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$，设 $x_1<x_2$，x_1、$x_2\in\mathbf{R}$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{2^{x_1}-1}{2^{x_1}+1}-\dfrac{2^{x_2}-1}{2^{x_2}+1}=\dfrac{2(2^{x_1}-2^{x_2})}{(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)}$

$\because 2^{x_1}+1>0,2^{x_2}+1>0$，又 $x_1<x_2$，

$\therefore 2^{x_1}-2^{x_2}<0$，$\therefore f(x_1)-f(x_2)<0$

$\therefore f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上是增函数.

例 6 (理科选用)定义在 **R** 上的奇函数 $f(x)$有最小正周期是 2，当 $0<x<1$ 时，$f(x)=\frac{2^x}{4^x+1}$.

(1)讨论 $f(x)$在(0,1)上的单调性；

(2)求 $f(x)$在$[-1,1]$上的表达式；

(3)若 $f(x)-a$ 有零点，求实数 a 的取值范围.

[解] (1)设 $0<x_1<x_2<1$，则在 $f(x_1)-f(x_2)=\frac{(2^{x2}-2^{x1})(2^{x1+x2}+1)}{(4^{x1}+1)(4^{x2}+1)}$中，由于函数 $y=2^x$ 是增函数，得 $2x_2-2x_1>0$，从而 $f(x_1)-f(x_2)>0$.

即 $f(x_1)>f(x_2)$．所以 $f(x)$在(0,1)上是减函数.

(2)当$-1<x<0$时，$0<-x<1$，$f(x)=-f(-x)=-\dfrac{2^{-x}}{4^{-x}+1}=$

$-\dfrac{2^{x}}{4^{x}+1}$，

由定义在 **R** 上的奇函数的图象过原点，得 $f(0)=0$，

又 $f(-1)=f(-1+2)=f(1)$，且 $f(-1)=-f(1)$，所以 $f(-1)=f(1)=0$，

所以，$f(x)$在$[-1,1]$上的表达式是

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2^{x}}{4^{x}+1}，& 0<x<1，\\ 0，& x=0，x=\pm1，\\ -\dfrac{2^{x}}{4^{x}+1}，& -1<x<0.\end{cases}$$

(3)由(1)可知 $f(x)$在(0,1)上递减，值域是$(\frac{2}{5}, \frac{1}{2})$，因此 $f(x)$在$[-1,1]$上的值域是$(-\frac{1}{2}, -\frac{2}{5})\cup\{0\}\cup(\frac{2}{5}, \frac{1}{2})$.

依题意，关于 x 的方程 $f(x)=a$ 有实数解时求实数 a 的取值范围，即函数的值域，由 $f(x)$的周期性，可知 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上的值域$(-\frac{1}{2}, -\frac{2}{5})\cup\{0\}\cup(\frac{2}{5}, \frac{1}{2})$即为 a 的取值范围.

- **[点评与警示]** 问题(1)中关于单调性的讨论，还可用导数法；问题(2)中求解分段函数时，需要注意定义域，同时有效利用函数的周期性解题.

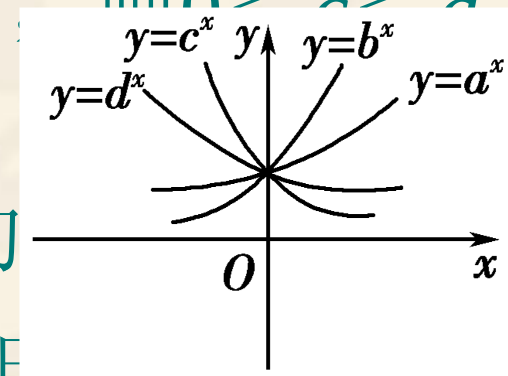
JIE TI JING YAN GONG XIANG

解题经验共享

- 1．对于指数运算，要注意避免出现下列的错误
- (1)$am+n=a^m+a^n$；
- (2)$(a+b)^m=a^m+b^m$；
- (3)$(a^m)^n=am+n$等等．
- 2．指数函数值受到底数a大小变化的影响，因此解题时常对底数a按$0<a<1$和$a>1$进行分类讨论．

- 3．形如$y=a^{f(x)}(a>0，a\neq 1)$的函数有如下性质
- (1)定义域与函数$f(x)$的定义域相同；
- (2)先确定函数$u=f(x)$的值域，然后以u的值域作为函数$y=a^{u}(a>0，a\neq 1)$的定义域，从而求得函数$y=a^{f(x)}(a>0，a\neq 1)$的值域.
- 4．指数值的大小比较
- (1)化同底后利用函数的单调性；
- (2)作差或作商法；
- (3)利用中间量(0或1)；

- 5．指数函数图象的特点
- 指数函数在同一直角坐标系中的图象的相对位置与底数大小的关系如图所示，则$0<c<d<1<a<b$.



- 在y轴右侧，图象从下到上相应的
- 由小变大，即按逆时针方向底数由
- 6．涉及指数函数的定义域、值域、单调性和图象等，一般在处理问题时要结合指数函数的图象，重视数形结合思想的运用.

KE WAI XUE SHENG LIAN YU WU

课外学生练与悟