第二节 极 限

一. 数列极限

（一） 数列极限的有关概念

（二）收敛数列的性质

（三 ）极限存在准则

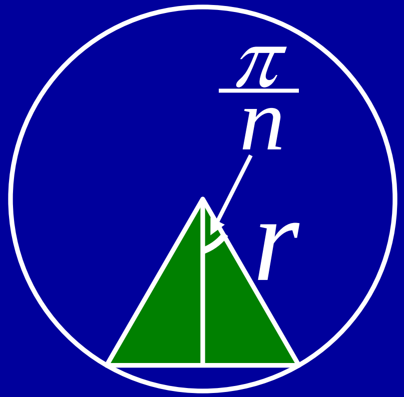
（一）数列极限的有关概念

1.引例 设有半径为 r 的圆，用其内接正 n 边形的面积 A_n 逼近圆面积 S .

如图所示，可知

$$A_n = n\,r^2 \sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}$$

$$(n = 3, 4, 5, \cdots)$$



当 n 无限增大时，A_n 无限逼近 S

数学语言描述：$\forall\, \varepsilon > 0$，$\exists$正整数 N，当 $n > N$ 时，总有

$$\left| A_n - S \right| < \varepsilon$$

定义1 自变量取正整数的函数称为**数列**，记作 $x_n = f(n)$ 或 $\{x_n\}$. x_n 称为**通项(一般项)** .

若数列 $\{x_n\}$ 及常数 a 有下列关系：

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \text{正数} N,\ \text{当} n > N \text{时，总有} \left| x_n - a \right| < \varepsilon}$$

则称该数列 $\{x_n\}$ 的极限为 a，记作

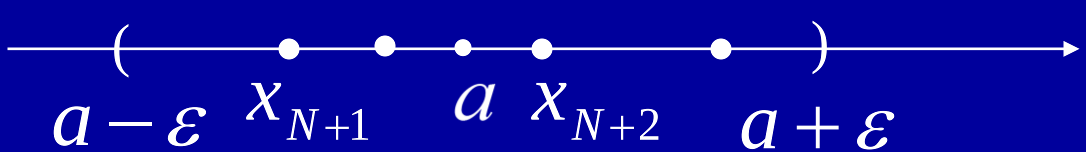
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{或} \quad x_n \to a \ (n \to \infty)$$

此时也称数列**收敛**，否则称数列**发散**.

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \quad (n > N)$$

即 $x_n \in \bigcup(a, \varepsilon)$ $(n > N)$

几何解释：



例如, $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots$

$$x_n=\frac{n}{n+1}\to 1\quad(n\to\infty)$$

$2\,,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n+(-1)^{n-1}}{n},\cdots$

$$x_n=\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}\to 1\quad(n\to\infty)$$

收敛

$2\,,4\,,8\,,\ \cdots\,,2^n\,,\cdots$

$$x_n=2^n\to\infty\quad(n\to\infty)$$

$1\,,-1\,,1\,,\ \cdots\,,(-1)^{n+1}\,,\cdots$

$$x_n=(-1)^{n+1}\quad \text{趋势不定}$$

发散

例35. 已知 $x_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n}$, 证明数列 $\{x_n\}$ 的极限为1.

证: $|x_n - 1| = \left|\dfrac{n+(-1)^n}{n} - 1\right| = \dfrac{1}{n}$

$\forall \varepsilon > 0$, 欲使 $|x_n - 1| < \varepsilon$, 即 $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$, 只要 $n > \frac{1}{\varepsilon}$

因此, 取 $N = [\dfrac{1}{\varepsilon}]$, 则当 $n > N$ 时, 就有

$$\left|\frac{n+(-1)^n}{n} - 1\right| < \varepsilon$$

故 $$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^n}{n} = 1$$

例36 证明数列$x_n = \dfrac{3n^2}{n^2-4}\ (n \ge 3)$的极限为3.

证 $|x_n - a_n| = \left| \dfrac{3n^2}{n^2-4} - 3 \right| = \dfrac{12}{n^2-4} < \dfrac{12}{n}\quad (n \ge 3),$

$\forall \varepsilon > 0$, 欲使$|x_n - 3| < \varepsilon$, 只要$\dfrac{12}{n} < \varepsilon$,即$n > \dfrac{12}{\varepsilon}$,

取 $N = \max\left\{ \left[\dfrac{12}{\varepsilon} \right], 3 \right\}$, 则当$n > N$时,就有

$$\left| \frac{3n^2}{n^2-4} - 3 \right| < \varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{n^2-4} = 3.$$

例37. 设 $|q|<1$, 证明等比数列 $1, q, q^2, \cdots, q^{n-1}, \cdots$ 的极限为 0 .

证: $|x_n - 0| = |q^{n-1} - 0| = |q|^{n-1}$

$\forall \varepsilon \in (0,1)$, 欲使 $|x_n - 0| < \varepsilon$, 只要 $|q|^{n-1} < \varepsilon$, 即

$(n-1)\ln|q| < \ln\varepsilon$, 亦即 $n > 1 + \dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$.

因此 , 取 $N = \left[1 + \dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|} \right]$, 则当 $n > N$ 时, 就有

$$|q^{n-1} - 0| < \varepsilon$$

故
$$\lim_{n\to\infty} q^{n-1} = 0$$

练习 已知 $x_n = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2}$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

证: $|x_n - 0| = \left|\dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2} - 0\right| = \dfrac{1}{(n+1)^2} < \dfrac{1}{n+1}$

$\forall \varepsilon \in (0,1)$, 欲使 $|x_n - 0| < \varepsilon$, 只要 $\dfrac{1}{n+1} < \varepsilon$, 即 $n > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$.

取 $N = [\dfrac{1}{\varepsilon} - 1]$, 则当 $n > N$ 时, 就有 $|x_n - 0| < \varepsilon$,

故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2} = 0$

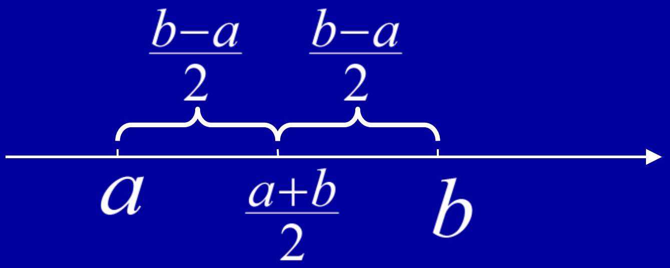
说明: N 与 ε 有关, 但不唯一.

不一定取最小的 N.

也可由 $|x_n - 0| = \dfrac{1}{(n+1)^2}$

取 $N = [\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - 1]$

（二）收敛数列的性质



定理1　收敛数列的极限唯一.

证: 用反证法. 假设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, 且 $a < b$.

取 $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$, 因 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 故存在 N_1 , 使当 $n > N_1$ 时,

$$|x_n - a| < \frac{b-a}{2}, \text{ 从而 } x_n < \frac{a+b}{2}$$

同理, 因 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, 故存在 N_2 , 使当 $n > N_2$ 时, 有

$$|x_n - b| < \frac{b-a}{2}, \text{ 从而 } x_n > \frac{a+b}{2}$$

取 $N = \max\{N_1\,, N_2\}$, 则当 $n > N$ 时, x_n 满足的不等式矛盾. 故假设不真！因此收敛数列的极限必唯一.

定理2 收敛数列一定有界.

证: 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 取 $\varepsilon = 1$, 则 $\exists N$, 当 $n > N$ 时, 有

$|x_n - a| < 1$, 从而有

$$|x_n| = |(x_n - a) + a| \le |x_n - a| + |a| < 1 + |a|$$

取 $$M = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_N|, 1 + |a|\}$$

则有 $$|x_n| \le M \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

由此证明收敛数列必有界.

说明: 此性质反过来不一定成立 . 例如,

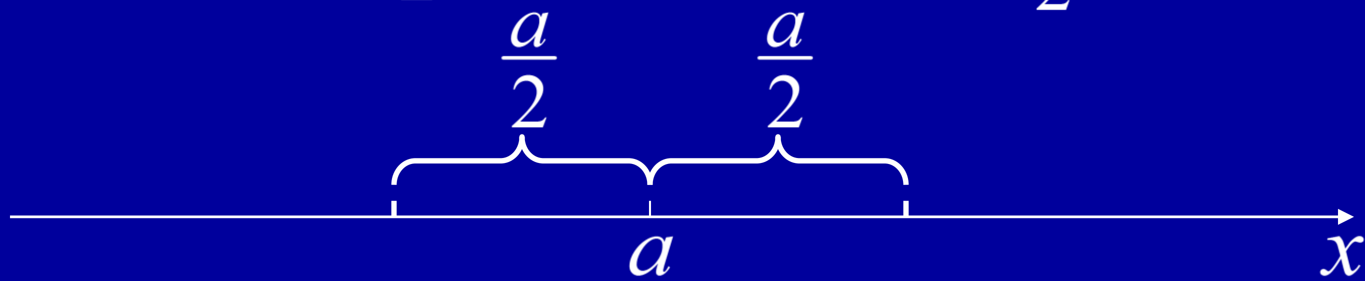
数列 $\{(-1)^{n+1}\}$ 虽有界但不收敛 .

定理3　收敛数列的保号性.

若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 且 $a > 0 \quad (< 0)$, 则$\exists N \in \mathrm{N}^+$,当$n > N$时, 有$x_n > 0\ (< 0)$.

证: 对 $a > 0$, 取 $\varepsilon = \frac{a}{2}$, 则$\exists N \in \mathrm{N}^+$,当$n > N$时,

$$\left| x_n - a \right| < \frac{a}{2} \Longrightarrow x_n > a - \frac{a}{2} > 0$$



推论: 若数列从某项起 $x_n \geq 0\ (\leq 0)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 则 $a \geq 0\,(\leq 0)$. (用反证法证明)

（三）极限存在准则(P44)

1. 夹逼准则 (准则1)

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ y_n \le x_n \le z_n \quad (n = 1, 2, \cdots) \\ (2)\ \underline{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \underline{\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a}\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

证: 由条件 (2) , $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1, N_2,$

当 $n > N_1$ 时, $|y_n - a| < \varepsilon$, 当 $n > N_2$ 时, $|z_n - a| < \varepsilon$

令 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon, \quad a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon,$$

由条件 (1) $\quad a - \varepsilon < y_n \le x_n \le z_n < a + \varepsilon$

即 $|x_n - a| < \varepsilon$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

例55. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$

证: 利用夹逼准则 . 由

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\le\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+1/n}}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$$

例56. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\sqrt[n]{a^n+b^n}$, 其中 $b>a>0$.

P45. 错误更正

证 设 $x_n=\sqrt[n]{a^n+b^n}$,

由于 $b>a>0$, 因此，有

$$\sqrt[n]{b^n}<x_n<\sqrt[n]{2b^n}$$

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$, 因此有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{b^n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2b^n}=b.$$

于是由利用夹逼准则，得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=b.$$

习作题

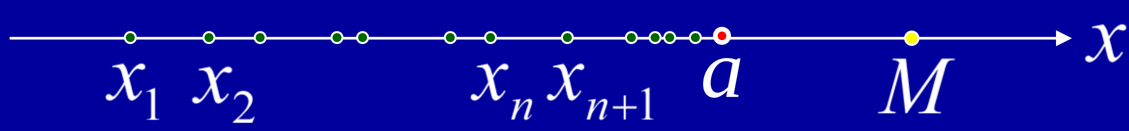
1. 证明$\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)=1$

2. 证明$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)=\frac{1}{2}$

2. 单调有界数列必有极限 (准则2)（P45）

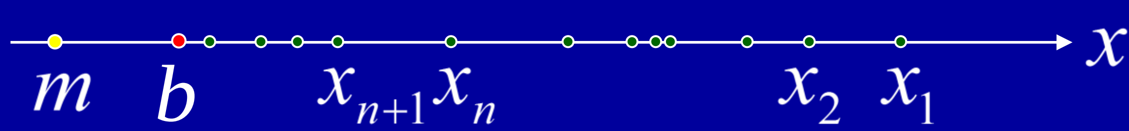
$$x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n \le x_{n+1} \le \cdots \le M$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = a \quad (\le M\ )$$



$$x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_n \ge x_{n+1} \ge \cdots \ge m$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = b \quad (\ge m\ )$$



(证明略)

例57　设 $x_1=\sqrt{2}, x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}, \cdots, x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}, \cdots$ 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解　(1) 单调性　易知 $x_1 < x_2$, 假设 $x_{k-1} < x_k$, 则

$$x_k=\sqrt{2+x_{k-1}} < x_{k+1}=\sqrt{2+x_k}$$

(2) 有界性

显然 $x_1=\sqrt{2}<2 \quad x_2=\sqrt{2+x_1}<\sqrt{2+2}=2$

假设 $x_k<2$　则有 $x_{k+1}=\sqrt{2+x_k}<\sqrt{2+2}=2$

(3) 求极限

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$　由极限惟一性，有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n-1}=a$

两边求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2+x_{n-1}}$

即 $a=\sqrt{2+a}$，解之得 $a=2$, $a=-1$(不合，舍去)

例58 设$a>0, x_0>0, x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n}), n=1,2,\cdots,$.求$\lim_{n\to\infty} x_n$.

解 (1) 有界性 由$x_0>0$, 知$x_n>0(n=1,2,\cdots)$.因为

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})\geq\sqrt{x_n\cdot\frac{a}{x_n}}=\sqrt{a},$$

(2)单调性 $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}(1+\frac{a}{x_n^2})\leq\frac{1}{2}(1+\frac{a}{a})=1,$

即 $x_{n+1}\leq x_n$.

(3)求极限 设$\lim_{n\to\infty} x_n=A$. 由极限惟一性，有$\lim_{n\to\infty} x_{n-1}=A$

两边求极限$\lim_{n\to\infty} x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n}),$

即$A=\frac{1}{2}(A+\frac{a}{A})$，解之得$A=\pm\sqrt{a}$ (负的舍去)

HIGH EDUCATION PRESS

练习 设 $x_1=\sqrt{a}, x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}}, \cdots, x_n=\sqrt{a+x_{n-1}}, a>0$.求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解 (1) 单调性 易知 $x_1<x_2$, 假设 $x_{k-1}<x_k$, 则

$$x_k=\sqrt{a+x_{k-1}} < x_{k+1}=\sqrt{a+x_k}$$

(2) 有界性 显然 $x_1=\sqrt{a}<\sqrt{a}+1$

$$x_2=\sqrt{a+x_1}<\sqrt{a+\sqrt{a}+1}<\sqrt{a+2\sqrt{a}+1}=\sqrt{(\sqrt{a}+1)^2}=\sqrt{a}+1$$

假设 $x_k<\sqrt{a}+1$ 则有 $x_{k+1}=\sqrt{a+x_k}<\sqrt{a+\sqrt{a}+1}<\sqrt{a}+1$

(3)求极限

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$ 由极限惟一性, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n-1}=A$

两边求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{A+x_{n-1}}$

即 $A=\sqrt{2+A}$, 解之得 $A=\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{1+4a})$

公式推导. 设 $x_n=(1+\frac{1}{n})^n\ (n=1,2,\cdots)$,

证明数列 $\{x_n\}$ 极限存在 .

证: 利用二项式公式 , 有

$$x_n=(1+\tfrac{1}{n})^n$$

$$=1+\frac{n}{1!}\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3}+\cdots$$

$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}\frac{1}{n^n}$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})$$

$$x_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) + \cdots$$

$$+ \frac{1}{n!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \cdots (1 - \frac{n-1}{n})$$

$$x_{n+1} = 1 + 1 + \underbrace{\frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n+1})}_{\text{大}} + \underbrace{\frac{1}{3!}(1 - \frac{1}{n+1})(1 - \frac{2}{n+1})}_{\text{大}} + \cdots$$

$$\underbrace{+ \frac{1}{(n+1)!}(1 - \frac{1}{n+1})(1 - \frac{2}{n+1}) \cdots (1 - \frac{n}{n+1})}_{\text{正}}$$

比较可知 $x_n < x_{n+1}\ (n = 1, 2, \cdots)$

又 $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$

又 $x_n=(1+\frac{1}{n})^n<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$

$$<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$=1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3$$

根据准则 2 可知数列 $\{x_n\}$ 有极限 .

记此极限为 e , 即

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$$

e 为无理数 , 其值为

$$e=2.718281828459045\cdots$$

例59　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+2}$.

解

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+2}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2}$$

$$=\mathrm{e}\times 1=\mathrm{e}.$$

例60. 设某药物一次静脉注射后，瞬时血药浓度的消除速率与该瞬时血药浓度成正比，比例系数为r.一次静脉注射后，药物立刻在体内达到平衡的血药浓度为M_0(这时t=0) ,求经过时间T后，血药的浓度$M(t)$.

解：因为血药在体内的消除过程是连续进行的,每一时刻血药的浓度及其变化的速率不相同.为此将时间段[0, T]分为n等份,每段时间为 $\frac{T}{n}$.

各分点为 $0,\ \frac{T}{n},\ \frac{2T}{n},\cdots,\ \frac{(n-1)T}{n},\ T.$

尽管不同时刻体内的血药浓度不同,浓度的消除速率也不同.但是,当n很大时,时间间隔(T/n)很短,在这个很短的时间间隔内,血药浓度的变化不大,可以用“不变的”速率来代替“变化”的速率，即在这个很短的时间间隔内，可以把血药消除的速率看成常量，它与这个时间间隔开始时的血药浓度成正比

于是第一小段时间间隔内消除的血药浓度为

$$rM_0\frac{T}{n},$$

剩余的血药浓度为

$$M_1 = M_0 - rM_0\frac{T}{n} = M_0\left(1-\frac{rT}{n}\right),$$

第二小段时间间隔内消除的血药浓度为

$$rM_1\frac{T}{n}=rM_0(1-\frac{rT}{n})\cdot\frac{T}{n},$$

剩余的血药浓度为

$$M_2=M_1-rM_1\frac{T}{n}$$

$$=M_0(1-\frac{rT}{n})-rM_0(1-\frac{rT}{n})\cdot\frac{T}{n}$$

$$=M_0(1-\frac{rT}{n})(1-\frac{rT}{n})=M_0(1-\frac{rT}{n})^2,$$

第三小段时间间隔内消除的血药浓度为

$$rM_2\frac{T}{n}=rM_0(1-\frac{rT}{n})^2\cdot\frac{T}{n},$$

剩余的血药浓度为

$$M_3=M_2-rM_2\frac{T}{n}=M_0(1-\frac{rT}{n})^3,$$

依次类推，便得n个时间间隔末剩余的血药浓度为

$$M_n=M_0(1-\frac{rT}{n})^n,$$

当$n\to\infty$时,得T时刻体内的血药浓度为

$$M(t)=\lim_{n\to\infty}M_n=\lim_{n\to\infty}M_0(1-\frac{rT}{n})^n=M_0\mathrm{e}^{-rT}.$$

内容小结

1. 数列极限的 “ $\varepsilon - N$ ” 定义及应用

2. 收敛数列的性质:

唯一性 ; 有界性 ; 保号性;

任一子数列收敛于同一极限

3. 极限存在准则:

夹逼准则 ; 单调有界准则 .

思考与练习

1. 如何判断极限不存在?

方法1. 找一个趋于∞的子数列;

方法2. 找两个收敛于不同极限的子数列.

2. 已知 $x_1 = 1,\ x_{n+1} = 1 + 2x_n\ (n = 1, 2, \cdots)$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 时, 下述作法是否正确? 说明理由.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cancel{=} a$, 由递推式两边取极限得

$$a = 1 + 2a \Longrightarrow a = -1$$

不对! 此处 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$