第二节　　极　　限

三、 无穷小与无穷大

（一） 无穷小

（二） 无穷大

（三）无穷小与无穷大的关系

HIGH EDUCATION PRESS

（一） 无穷小

定义6 若 $x \to x_0$ 时，函数 $f(x) \to 0$，则称函数 $f(x)$ (或$x \to \infty$)

为 $x \to x_0$ 时的**无穷小**．(或$x \to \infty$)

例如：

$\lim\limits_{x \to 1}(x-1)=0$，函数 $x-1$ 当 $x \to 1$ 时为无穷小;

$\lim\limits_{x \to \infty}\frac{1}{x}=0$，函数 $\frac{1}{x}$ 当 $x \to \infty$ 时为无穷小;

$\lim\limits_{x \to -\infty}\frac{1}{\sqrt{1-x}}=0$，函数 $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ 当 $x \to -\infty$ 时为无穷小.

定义6' 设函数$f(x)$在x_0的某个去心邻域内有定义（或$|x|>X_0$时有定义），如果对于任意给定的正数有$\varepsilon>0$,总存在正数δ(或正数X)，使得对于满足不等式 $0<|x|<\delta$(或$|x|>X$)的一切x,都有不等式

$$|f(x)|<\varepsilon$$

成立，则称$f(x)$当$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时为无穷小量，简称为无穷小量。记作 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ (或$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$).

$\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$, 但$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=1$, 因此不能说“sin$x$是无穷小”，

而要说：sin$x$当 $x\to 0$时为无穷小.

定义6. 若 $x \to x_0$ (或 $x \to \infty$) 时，函数 $f(x) \to 0$，则

则称函数 $f(x)$ 为 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$) 时的**无穷小**.

说明: 除 0 以外任何很小的常数都不是无穷小！

因为

$$\lim_{x \to x_0} C = 0 \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$$

$$\text{当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时,}$$

$$|C - 0| < \varepsilon$$

显然 C 只能是 0！

无穷小的性质(运算法则)

性质1. 有限个无穷小的和还是无穷小 .

证: 考虑两个无穷小的和 . 设 $\lim_{x\to x_0}\alpha=0$, $\lim_{x\to x_0}\beta=0$,

$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta_1>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时 , 有 $|\alpha|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\exists\delta_2>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时 , 有 $|\beta|<\frac{\varepsilon}{2}$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有

$$|\alpha+\beta|\le|\alpha|+|\beta|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

因此

$$\lim_{x\to x_0}(\alpha+\beta)=0.$$

这说明当 $x\to x_0$ 时, $\alpha+\beta$ 为无穷小量 .

类似可证: **有限个**无穷小之和仍为无穷小 .

说明: **无限个**无穷小之和**不一定**是无穷小 !

例如,

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)=1$$

性质2 . 有界函数与无穷小的乘积是无穷小 .

证: 设 $\forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta_1)$, $|u| \le M$

又设 $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha = 0$, 即 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_2 > 0$, 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta_2)$ 时, 有 $|\alpha| \le \frac{\varepsilon}{M}$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时 , 就有

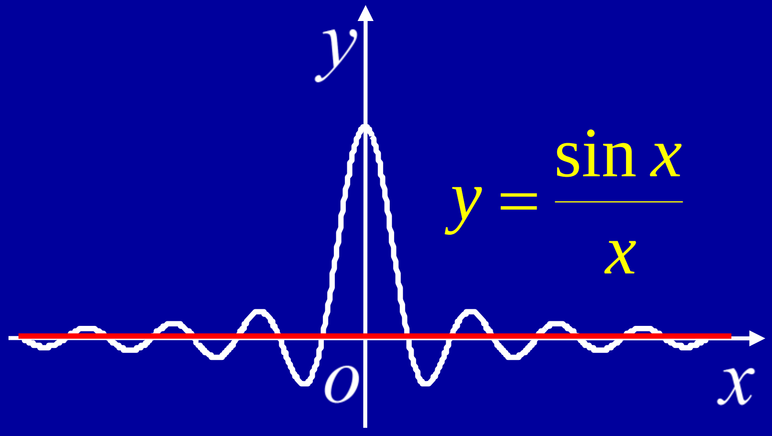
$$|u\alpha| = |u||\alpha| \le M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

故 $\lim\limits_{x\to x_0} u\alpha = 0$, 即 $u\alpha$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷小 .

推论 1 . 常数与无穷小的乘积是无穷小 .

推论 2 . 有限个无穷小的乘积是无穷小 .

例44. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.



解: $\because\ \left|\sin x\right|\le 1$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

利用性质2 可知 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$.

说明 : $y=0$ 是 $y=\dfrac{\sin x}{x}$ 的渐近线 .

定理 7 (无穷小与函数极限的关系)

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Longleftrightarrow f(x) = A + \alpha\text{，其中}\alpha\text{为 } x \to x_0 \text{ 时的无穷小量 .}$$

证： $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$

$$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时, 有 } |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\xLeftrightarrow{\alpha = f(x) - A} \lim_{x \to x_0} \alpha = 0$$

对自变量的其它变化过程类似可证 .

（二） 无穷大

定义2 . 若任给 $M>0$，总存在 $\delta>0$ **(正数 X)**，使对一切满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ （$|x|>X$）的 x，总有

$$|f(x)|>M \qquad ①$$

则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ ($x\to\infty$) 时为无穷大，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty. \qquad (\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty)$$

若在定义中将 ①式改为 $f(x)>M$ （$f(x)<-M$），

则记作 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=+\infty$ （$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=-\infty$）

注意:

1. 无穷大不是很大的数, 它是描述函数的一种状态.

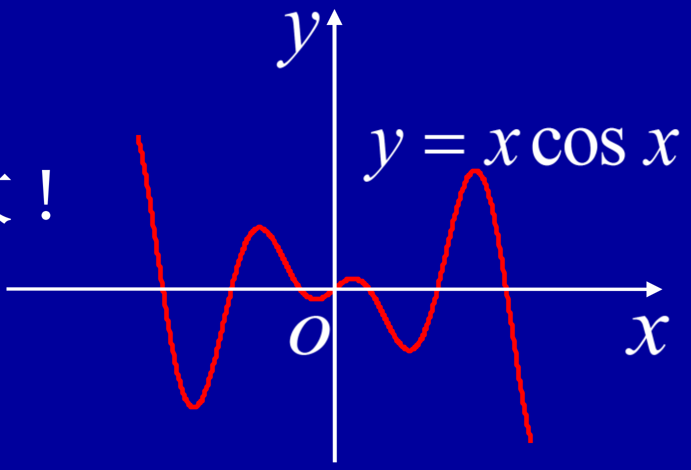
2. 函数为无穷大 , 必定无界 . 但反之不真 !

例如, 函数 $f(x)=x\cos x,\ x\in(-\infty,+\infty)$

$$f(2n\pi)=2n\pi\to\infty\ \ (\text{当}\ n\to\infty)$$

但 $f(\frac{\pi}{2}+n\pi)=0$

所以 $x\to\infty$ 时 , $f(x)$ 不是无穷大 !



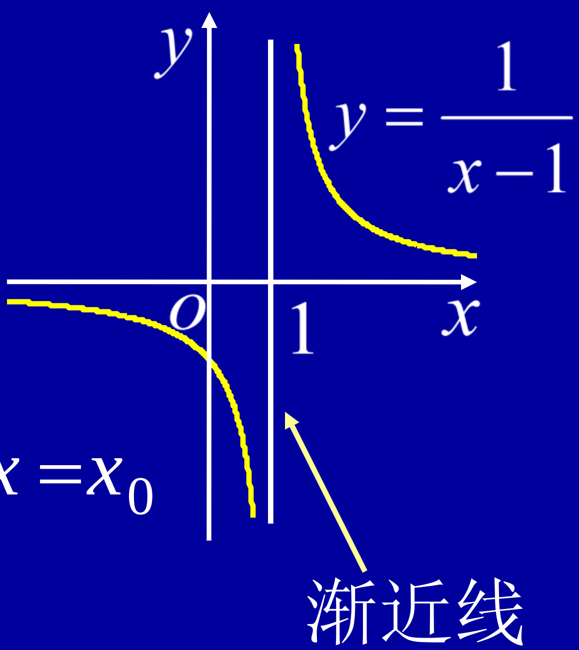
例. 证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$

证: 任给正数 M, 要使 $\left|\dfrac{1}{x-1}\right|>M$, 即 $|x-1|<\dfrac{1}{M}$,

只要取 $\delta=\dfrac{1}{M}$, 则对满足 $0<|x-1|<\delta$ 的一切 x, 有

$$\left|\frac{1}{x-1}\right|>M$$

所以 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$.



一般地: 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, 则直线 $x=x_0$

为曲线 $y=f(x)$ 的铅直渐近线 .

（三）无穷小与无穷大的关系

定理8 在自变量的同一变化过程中,

若 $f(x)$ 为无穷大, 则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小 ;

若 $f(x)$ 为无穷小, 且 $f(x)\neq 0$, 则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

说明: 据此定理 , 关于无穷大的问题都可转化为无穷小来讨论.

内容小结

1. 无穷小与无穷大的定义

2. 无穷小的性质

3. 无穷小与函数极限的关系 Th7

4. 无穷小与无穷大的关系 Th8