第二节 极 限

二、函数的极限

对 $y = f(x)$, 自变量变化过程的六种形式:

$$(1)\ x \to x_0 \qquad (4)\ x \to \infty$$

$$(2)\ x \to x_0^{+} \qquad (5)\ x \to +\infty$$

$$(3)\ x \to x_0^{-} \qquad (6)\ x \to -\infty$$

本节内容：

(1)自变量趋于无穷大时函数的极限

(2)自变量趋于有限值时函数的极限

1. 函数极限的定义

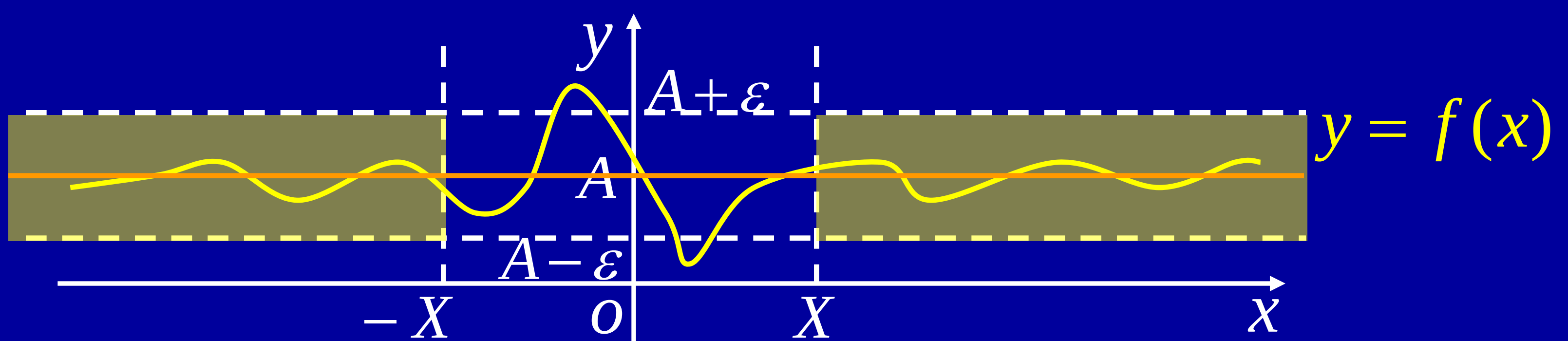
（1）自变量趋于无穷大时函数的极限

定义4 设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义, 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0,$ 当 $|x| > X$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon,$ 则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时的极限, 记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \quad 或 \ f(x) \to A \ (当 x \to \infty)$$

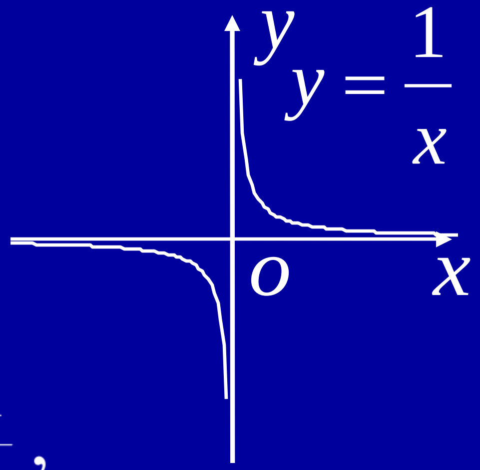
$$\boxed{x < -X \text{ 或 } x > X} \qquad \boxed{A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon}$$

几何解释:



直线 $y = A$ 为曲线 $y = f(x)$ 的水平渐近线

如. 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$



证: $\left|\frac{1}{x}-0\right|=\frac{1}{|x|}$

故 $\forall\,\varepsilon>0$, 欲使 $\left|\frac{1}{x}-0\right|<\varepsilon$, 即 $|x|>\frac{1}{\varepsilon}$,

取 $X=\frac{1}{\varepsilon}$, 当 $|x|>X$ 时, 就有 $\left|\frac{1}{x}-0\right|<\varepsilon$

因此 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

注: $y=0$ 为 $y=\frac{1}{x}$ 的水平渐近线.

两种特殊情况：

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists X>0,\ 当\ x>X\ 时,\ 有$$

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=A \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists X>0,\ 当\ x<-X\ 时,\ 有$$

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

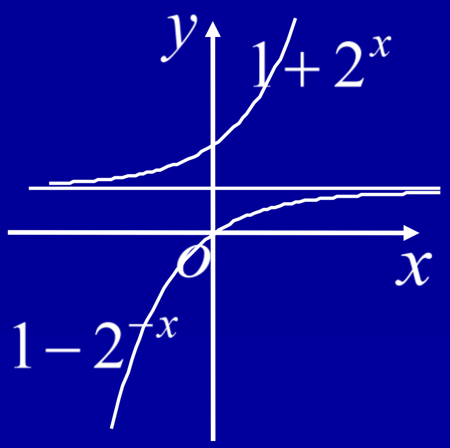
几何意义： 直线 $y=A$ 仍是曲线 $y=f(x)$ 的渐近线 .

例如，$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$， $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$

都有水平渐近线 $y=0$;

又如，$f(x)=1-2^{-x}$， $g(x)=1+2^{x}$

都有水平渐近线 $y=1$.



例38. 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0.$

证: $\left|f(x)-A\right|=\left|\dfrac{\sin x}{x}-0\right|\le\dfrac{1}{|x|}$, **先放大式子**

故 $\forall\varepsilon>0$, 欲使 $\left|\dfrac{\sin x}{x}-0\right|<\varepsilon$, 即 $|x|>\dfrac{1}{\varepsilon}$,

取 $X=\dfrac{1}{\varepsilon}$, 当 $|x|>X$ 时, 就有 $\left|\dfrac{\sin}{x}-0\right|<\varepsilon$

因此 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$

注: $y=0$ 为 $y=\dfrac{\sin x}{x}$ 的水平渐近线.

例39. 证明 $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0.$

证: $|f(x)-A| = |\mathrm{e}^x - 0| = \mathrm{e}^x,$

故 $\forall\ 0<\varepsilon(\varepsilon<1)$，欲使 $|f(x)-A|<\varepsilon,$

只要 $\mathrm{e}^x<\varepsilon$，即 $x<\ln\varepsilon,$

取正数 $X=-\ln\varepsilon$，则当 $x<-X$ 时,

就有 $|\mathrm{e}^x-0|<\varepsilon$

因此 $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$

思考: $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x$ 的极限存在吗？$\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^x$ 的极限存在吗？

（2）自变量趋于有限值时函数的极限

1. $x \to x_0$ 时函数极限的定义

引例. 测量正方形面积. (真值: 边长为 x_0;面积为A)

直接观测值	确定直接观测值精度 δ:
边长 x	$\lvert x - x_0 \rvert < \delta$
$\Downarrow$	$\Uparrow$
间接观测值	任给精度 ε, 要求 $\lvert x^2 - A \rvert < \varepsilon$
面积 x^2	

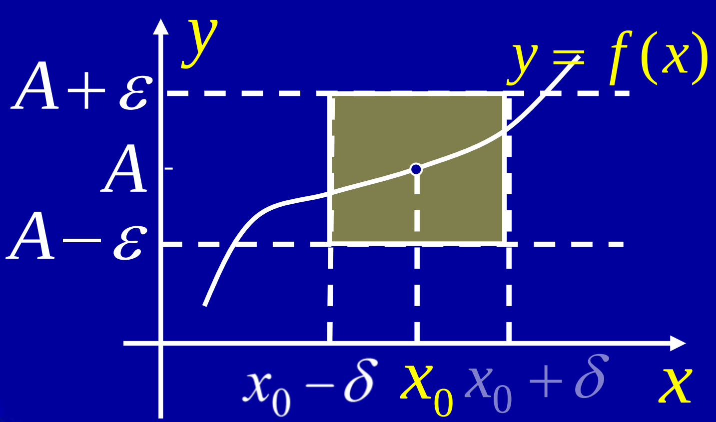
x_0

定义5 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义，若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限, 记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A \;(当 x \to x_0)$$

即 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$

几何解释:



这表明:

$$\boxed{\text{极限存在} \Longrightarrow \text{函数局部有界}}$$

例. 证明 $\lim\limits_{x \to x_0} C = C$ (C 为常数)

证: $|f(x) - A| = |C - C| = 0$

故 $\forall\, \varepsilon > 0$, 对任意的 $\delta > 0$,

当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时 ,

总有 $|C - C| = 0 < \varepsilon$

因此 $\lim\limits_{x \to x_0} C = C$

例40. 证明 $\lim\limits_{x\to 1}(2x+1)=5$

证: $\left|f(x)-A\right|=\left|(2x-1)-5\right|=2\left|x-2\right|$

$\forall\varepsilon>0$, 欲使 $\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$, 只要

$2\left|x-2\right|<\varepsilon$, 即 $\left|x-2\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$,

取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$, 则当 $0<\left|x-1\right|<\delta$ 时, 必有

$$\left|f(x)-A\right|=\left|(2x-1)-1\right|<\varepsilon$$

因此 $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)=1$

例41. 证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4}{x-2}=4$

证: $\left|f(x)-A\right|=\left|\dfrac{x^2-4}{x-2}-4\right|=\left|(x+2)-4\right|=\left|x-2\right|$

故 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\varepsilon$, 当 $0<\left|x-2\right|<\delta$ 时 , 必有

$$\left|\frac{x^2-1}{x-1}-2\right|=\left|x-2\right|<\delta=\varepsilon$$

因此 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$

练习 证明 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$

证: $\left|f(x)-A\right| = \left|\dfrac{x^2-1}{x-1}-2\right| = \left|x+1-2\right| = \left|x-1\right|$

故 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\varepsilon$, 当 $0<\left|x-1\right|<\delta$ 时, 必有

$$\left|\dfrac{x^2-1}{x-1}-2\right|<\varepsilon$$

因此 $$\lim_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$$

(3) 左极限与右极限

左极限： $f(x_0^-)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$

$\Longleftrightarrow \forall\,\varepsilon>0,\exists\,\delta>0,$ 当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时, 有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

右极限： $f(x_0^+)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$

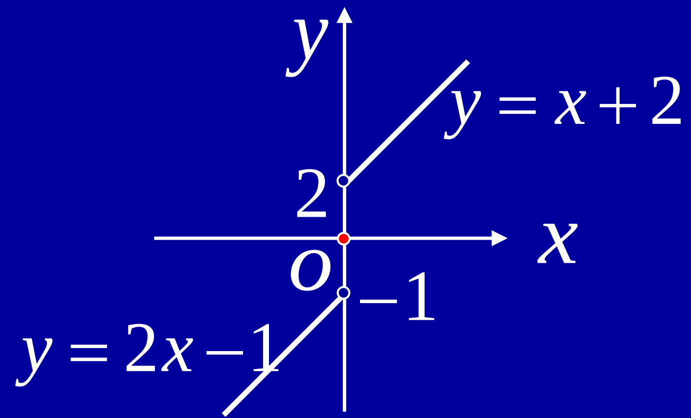
$\Longleftrightarrow \forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,\delta>0,$ 当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时, 有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

定理 3 .

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A$$

例42. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}2x-1, & x<0\\ 0\quad, & x=0\\ x+2, & x>0\end{cases}$$



讨论 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 的极限是否存在 .

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(2x-1)=-1$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+2)=2$$

显然 $f(0^-)\neq f(0^+)$, 所以 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在 .

例43. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}2x+a, & x<0\\ 0\quad, & x=0\\ x^2+2, & x>0\end{cases}$$

当 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 的极限存在，求常数a .

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(2x+a)=a,$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x^2+2)=2.$$

因为当 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 的极限存在,

所以由极限存在的充要条件有

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)\quad 即\quad a=2.$$

2. 函数极限的性质

定理4(唯一性) 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在，则极限值唯一.

定理5(局部有界) 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在，则存在某一个某一去心邻域$\overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$，使得$f(x)$在$\overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$上有界.

证: 已知 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$， 取$\varepsilon = 1$， 则$\exists\, \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$，

当$x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$时，有

$$|f(x)| = |[f(x) - A] + A|$$

$$\le |f(x) - A| + |A| \le 1 + |A|.$$

定理6 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 且 $A>0$ $(A<0)$, 则存在 $\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$,

使当 $x\in\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$ 时, $f(x)>0$. $(f(x)<0)$

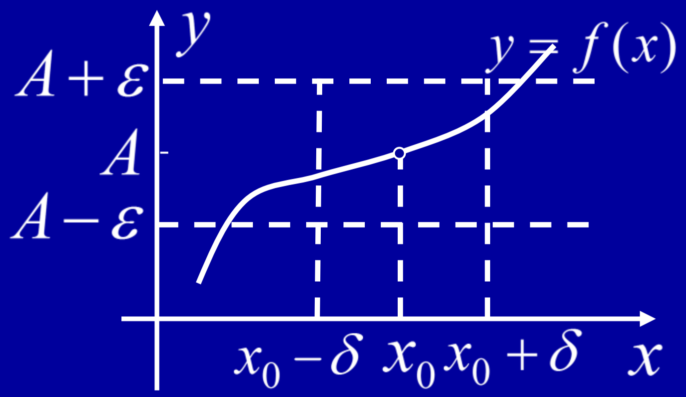
证: 已知 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 即 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\,\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$, 当

$x\in\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$ 时, 有 $A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$.

当 $A>0$ (<0) 时, 取正数 $\varepsilon\le A$ $(\varepsilon\le -A)$,

则在对应的邻域 $\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$ 上

$f(x)>0$. (<0)



推论 若在 x_0 的某去心邻域内 $f(x)\ge 0$，且 $(f(x)\le 0)$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则 $A\ge 0$. $(A\le 0)$

证: 用反证法. 当 $f(x)\ge 0$时，假设 $A<0$，则由定理 1，存在 x_0的某去心邻域，使在该邻域内 $f(x)<0$，与已知条件矛盾，所以假设不真，故 $A\ge 0$.

(同样可证 $f(x)\le 0$ 的情形)

思考: 若定理 2 中的条件改为 $f(x)>0$，是否必有 $A>0$?

不能! 如 $\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$

内容小结

1. 函数极限的"$\varepsilon-\delta$" 或"$\varepsilon-X$" 定义及应用

2. 函数极限的性质: 保号性定理

与左右极限等价定理

思考与练习

1. 若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在, 是否一定有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$?

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases} a\,x^2, & x\le 1 \\ 2x+1, & x>1 \end{cases}$ 且 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 存在, 则

$a=$ ___3___ .