第二节 极 限

六、无穷小的比较

引例． $x \to 0$ 时, $3x$, x^2, $\sin x$ 都是无穷小量, 但

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x}=0, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{3x}=\frac{1}{3},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2}=\infty,$$

可见无穷小趋于 0 的速度是不一样的,
如何进行比较呢?

定义8 设 α, β 是自变量同一变化过程中的无穷小,

若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$,则称 β 是比 α **高阶**的无穷小, 记作 $\beta=o(\alpha)$

若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=\infty$, 则称 β 是比 α **低阶**的无穷小;

若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=C\neq 0$, 则称 β 是 α 的**同阶**无穷小;

若 $\lim\frac{\beta}{\alpha^k}=C\neq 0$, 则称 β 是关于 α 的 ***k* 阶**无穷小;

若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$, 则称 β 是 α 的**等价**无穷小,

记作 $\alpha\sim\beta$ 或 $\beta\sim\alpha$

例如，当 $x \to 0$ 时

$$x^3 = o(6x^2)\ ;\quad \sin x \sim x\ ;\quad \tan x \sim x$$

$$\arcsin x \sim x$$

又如，

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4(\frac{x}{2})^2} = \frac{1}{2}$$

故 $x \to 0$ 时 $1-\cos x$ 是关于 x 的二阶无穷小, 且

$$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$$

例 证明: 当 $x \to 0$ 时, $\sqrt[n]{1+x}-1 \sim \frac{1}{n}x$

证: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{\frac{1}{n}x}$

$$a^n - b^n = (a-b)\,(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1})$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt[n]{1+x})^n - 1}{\frac{1}{n}x\left[(\sqrt[n]{1+x})^{n-1} + (\sqrt[n]{1+x})^{n-2} + \cdots + 1\right]}$$

$= 1$

$\therefore$ 当 $x \to 0$ 时, $\sqrt[n]{1+x}-1 \sim \frac{1}{n}x$

定理12 $\alpha \sim \beta \Longleftrightarrow \beta = \alpha + o(\alpha)$

证: $\alpha \sim \beta \Longleftrightarrow \lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 1$

$\Longleftrightarrow \lim(\dfrac{\beta}{\alpha} - 1) = 0$, 即 $\lim \dfrac{\beta - \alpha}{\alpha} = 0$

$\Longleftrightarrow \beta - \alpha = o(\alpha)$, 即 $\beta = \alpha + o(\alpha)$

例如, $x \to 0$ 时, $\sin x \sim x$, $\tan x \sim x$, 故

$x \to 0$ 时, $\sin x = x + o(x)$, $\tan x = x + o(x)$

$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$,$1 - \cos x = \dfrac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

例64 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 5x-\cos x+1}{\sin 3x}$.

解法一 因为当$x\to 0$时,

$$\tan 5x=5x+o(x),\sin 3x=3x+o(x),1-\cos x=\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

所以 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x+o(x)+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)}{3x+o(x)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{5+\dfrac{o(x)}{x}+\dfrac{x}{2}+\dfrac{o(x^2)}{x}}{3+\dfrac{o(x)}{x}}=\frac{5}{3}$$

例64 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 5x-\cos x+1}{\sin 3x}$.

解法二

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 5x}{\cos 5x}+2\sin^2\dfrac{x}{2}}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 5x}{x\cdot\cos 5x}+\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x}}{\dfrac{\sin 3x}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 5x}{5x}\cdot\dfrac{5}{\cdot\cos 5x}+\left(\dfrac{\sin x/2}{x/2}\right)^2\cdot\dfrac{x}{2}}{\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot 3}$$

$$=\frac{5+0}{3}=\frac{5}{3}.$$

习作题 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x+\sin^2 x-2x^3}{\tan x+4x^2}=5$

定理13 设 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$, 且 $\lim \frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在 , 则

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$$

证: $$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \left(\frac{\beta}{\beta'} \frac{\beta'}{\alpha'} \frac{\alpha'}{\alpha} \right)$$

$$= \lim \frac{\beta}{\beta'} \lim \frac{\beta'}{\alpha'} \lim \frac{\alpha'}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$$

例如, $$\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}$$

常用等价无穷小：当$x\to 0$时,

$$\sin x\sim x,\quad \tan x\sim x,\quad \arcsin x\sim x,$$

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\quad \sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x$$

$$\ln(1+x)\sim x\quad e^x-1\sim x$$

$$a^x-1\sim x\ln a,\quad \arctan x\sim x$$

一般地,当$u(x)\to 0$时,有

$$\sin u(x)\sim u(x),\quad \tan u(x)\sim u(x),\quad \arcsin u(x)\sim u(x),$$

$$1-\cos u(x)\sim\frac{1}{2}u(x)^2,\quad \sqrt[n]{1+u(x)}-1\sim\frac{1}{n}u(x)$$

$$\ln[1+u(x)]\sim u(x),\quad \mathrm{e}^{u(x)}-1\sim u(x)$$

$$a^{u(x)}-1\sim u(x)\ln a,\quad \arctan u(x)\sim u(x)$$

例65 求 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\tan x}$; (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)\ln(1+x)}{x^2+3x}$.

解: (1) 当 $x\to 0$ 时,

$\sin 2x \sim 2x,\ \tan x \sim x$

$$\therefore\quad 原式 = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x} = 2;$$

(2) 当 $x\to 0$ 时, $\ln(1+x)\sim x$

$$\therefore\quad 原式 = \lim_{x\to 0}\frac{(x+1)\,x}{x^2+3x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x+1}{x+3} = \frac{1}{3}.$$

例65 求 (3) $\lim_{x\to 0}\dfrac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}$; (4) $\lim_{x\to 0}\dfrac{(\sin x^2)\tan^2 x}{1-\cos x^2}$.

解: (3) 当 $x\to 0$时,

$$(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1\sim\frac{1}{3}x^2,\quad \cos x-1\sim-\frac{1}{2}x^2$$

$$\therefore\quad 原式=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-\frac{2}{3}$$

(4) 当 $x\to 0$时, $\sin x^2\sim x^2$, $\tan^2 x\sim x^2$, $1-\cos x^2\sim\frac{1}{2}x^4$.

$$\therefore\quad 原式=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot x^2}{\frac{1}{2}x^4}=2.$$

例65 求 (5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{\ln^2(1+2x)}$; (6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x\sin x)}{\tan x^2}$.

解: (5) 当 $x\to 0$时,

$$\sin^2 3x \sim (3x)^2, \quad \ln^2(1+2x)\sim (2x)^2$$

$$\therefore \quad 原式 = \lim_{x\to 0}\frac{(3x)^2}{(2x)^2} = \frac{9}{4};$$

(6) 当 $x\to 0$时, $\ln(1+3x\sin x)\sim 3x\sin x \sim 3x^2$, $\tan x^2 \sim x^2$,

$$\therefore \quad 原式 = \lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{x^2} = 3.$$

练习　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m}\ (n, m\in N)$.

解 当 $x\to 0$ 时, $\sin x\sim x$, 故 $\sin x^n\sim x^n$,

$$(\sin x)^m\sim x^m$$

于是　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^n}{x^m}=\begin{cases}1, & m=n\\ 0, & n>m\\ \infty, & n<m\end{cases}$

习作题　1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{x}$;　　2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin x^2)\tan x}{1-\cos x^2}$.

例66　已知当$x\to 0$时, $(1+ax^2)^{1/3}-1$与$\cos x-1$是等价无穷小,求常数a.

解:　当$x\to 0$时,

$$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1\sim\frac{1}{3}ax^2,\qquad \cos x-1\sim-\frac{1}{2}x^2$$

又当$x\to 0$时, $(1+ax^2)^{1/3}-1$与$\cos x-1$是等价无穷小,故

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}}{\cos x-1}=1,\qquad \text{即}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}ax^2}{-\frac{1}{2}x^2}=1,$$

故 $a=-\dfrac{3}{2}.$

例67　已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}f(x)}-1}{x^2}=C(C\neq 0)$,求常数$a$与$b$,

使当$x\to 0$时,有 $f(x)\sim ax^b$.

解　因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}f(x)}-1}{x^2}=C(C\neq 0)$, $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}f(x)}-1)=0$

于是 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}f(x)=0$, 故当$x\to 0$时, $\sqrt{1+\dfrac{1}{x}f(x)}-1\sim\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{x}f(x)$

从而有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{2x}f(x)}{x^2}=C$, 即 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{2x^3}=C$,

所以,当$x\to 0$时, $f(x)\sim 2Cx^3$,　因此, $a=2C, b=3$.

练习 当$x\to 0$时，$(\sin x + x^2\cos\frac{1}{x})$与$(1+\cos x)\ln(1+x)$

是否为同阶无穷小.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x + x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x + x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)x}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+\cos x)}\cdot\left(\frac{\sin x}{x} + x\cos\frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x} + x\cos\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{(1+1)}(1+0) = \frac{1}{2}$$

另解 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{(1+\cos x)}\left(\dfrac{\dfrac{\sin x + x^2\cos(1/x)}{x}}{\dfrac{\ln(1+x)}{x}}\right)$

练习　当$x\to 0$时,若$1-\cos x$与mx^n等价,求m和n的值.

解 因$x\to 0$时,$1-\cos x$与mx^n等价

故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{mx^n}=1$

又因为 $x\to 0$时,$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$

于是 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{mx^n}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{mx^n}=1$ 从而 $m=\dfrac{1}{2}, n=2$

习作题

1. 当$x\to\infty$时,$\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{1}{x^2}$与$\dfrac{1}{x^k}$是等价无穷小,求$k$值.

2. 已知$x\to 1$时,$\ln x\sim A(x-1)^n$,求A与n.

提示

令 $x-1=t$

说明: 设对同一变化过程, α, β 为无穷小, 由等价无穷小的性质, 可得简化某些极限运算的下述规则.

(1) 和差取大规则: 若 $\beta = o(\alpha)$, 则 $\alpha \pm \beta \sim \alpha$

例如, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^3+3x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{3x} = \dfrac{1}{3}$

(2) 和差代替规则: 若 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$ 且 β 与 α 不等价,

则 $\alpha - \beta \sim \alpha' - \beta'$, 且 $\lim\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma} = \lim\dfrac{\alpha'-\beta'}{\gamma}$,

但 $\alpha \sim \beta$ 时此结论未必成立.

例如, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x - \sin x}{\sqrt{1+x}-1} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x - x}{\frac{1}{2}x} = 2$

(3) 因式代替规则: 若 $\alpha \sim \beta$, 且 $\varphi(x)$ 极限存在或有界, 则

$$\lim \alpha\varphi(x) = \lim \beta\varphi(x)$$

例如, $\lim\limits_{x\to 0} \arcsin x \cdot \sin\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x \cdot \sin\dfrac{1}{x} = 0$

例1. 求 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$.

解: 原式 $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x\,(1-\cos x)}{x^3}$ 　　原式 $\cancel{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - x}{x^3}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot \frac{1}{2} x^2}{x^3} = \frac{1}{2}$$

内容小结

1. 无穷小的比较

设 α, β 对同一自变量的变化过程为无穷小, 且 $\alpha \neq 0$

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \begin{cases} 0, & \beta \text{ 是 } \alpha \text{ 的高阶无穷小} \\ \infty, & \beta \text{ 是 } \alpha \text{ 的低阶无穷小} \\ C\,(\neq 0), & \beta \text{ 是 } \alpha \text{ 的同阶无穷小} \\ 1, & \beta \text{ 是 } \alpha \text{ 的等价无穷小} \end{cases}$$

$$\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = C \neq 0, \qquad \beta \text{ 是 } \alpha \text{ 的 } k \text{ 阶无穷小}$$

2. 等价无穷小替换定理

常用等价无穷小：当$x \to 0$时，

$$\sin x \sim x,\quad \tan x \sim x,\quad \arcsin x \sim x,$$

$$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2,\quad \sqrt[n]{1+x}-1 \sim \frac{1}{n}x$$

$$\ln(1+x) \sim x \quad e^x - 1 \sim x$$

$$a^x - 1 \sim x\ln a,\quad \arctan x \sim x$$

一般地，当$u(x) \to 0$时，有

$$\sin u(x) \sim u(x),\quad \tan u(x) \sim u(x),\quad \arcsin u(x) \sim u(x),$$

$$1-\cos u(x) \sim \frac{1}{2}u(x)^2,\quad \sqrt[n]{1+u(x)}-1 \sim \frac{1}{n}u(x)$$

$$\ln[1+u(x)] \sim u(x),\quad e^{u(x)} - 1 \sim u(x)$$

$$a^{u(x)} - 1 \sim u(x)\ln a,\quad \arctan u(x) \sim u(x)$$

课堂练习. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[1+\dfrac{f(x)}{\sin x}]}{a^x-1}=A\,(a>0,a\neq 1)$,求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0}(a^x-1)=0$,故由已知条件可得:

$$\lim_{x\to 0}\ln[1+\frac{f(x)}{\sin x}]=0,\quad \text{即} \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sin x}=0$$

所以当 $x\to 0$ 时, $\ln[1+\dfrac{f(x)}{\sin x}]\sim\dfrac{f(x)}{\sin x}\sim\dfrac{f(x)}{x}$

又因为当 $x\to 0$ 时, $a^x-1\sim x\ln a$

于是有 $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[1+\dfrac{f(x)}{\sin x}]}{a^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{f(x)}{x}}{x\ln a}=\dfrac{1}{\ln a}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=A\ln a$.

习作题

设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[1+\dfrac{f(x)}{\sin 2x}]}{3^x-1}=5$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

作业题

1. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{\mathrm{e}^{3x}-1}=2$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

2. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ae^x+be^{-x}-c}{\sin^2 x}=1$, 求 a,b,c.

3. 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{1990}}{n^k-(n-1)^k}=A(A\neq 0,\neq\infty)$, 求 A,k.