同济大学

高等代数与解析几何

教师： 蒋志洪

理学院数学系

§9.4 保长同构与酉变换(正交变换)

定义. 设V和V'为内积空间, 它们的内积分别记为; $(\ ,\ )$和$(\ ,\ )'$, 如果V 到V'的线性映射f满足

$$\| f(v) \| = \| v \|, \ \forall v \in V$$

则称f为保长线性映射. 如果V 到V'的线性映射f满足

$$(f(\alpha), f(\beta))' = (\alpha, \beta), \ \forall \alpha, \beta \in V$$

则称f为保内积线性映射.

说明. 显然一个保内积线性映射一定是保长线性映射.

命题. 内积空间V到V'的线性映射f是保内积的当且仅当f是保长的.

证明. (必要性)因为距离是由内积定义的, 所以, 必要性显然.

(充分性) 由于在酉空间中

$$(\alpha,\beta)=\frac{1}{4}\|\alpha+\beta\|^2-\frac{1}{4}\|\alpha-\beta\|^2+\frac{i}{4}\|\alpha+i\beta\|^2-\frac{i}{4}\|\alpha-i\beta\|^2$$

在欧氏空间中

$$(\alpha,\beta)=\frac{1}{4}\|\alpha+\beta\|^2-\frac{1}{4}\|\alpha-\beta\|^2$$

所以两个向量的内积可由向量长度来确定. 由于f是保长线性映射, 所以

$$\begin{gathered}\|\alpha\pm i\beta\|=\|f(\alpha\pm i\beta)\|'=\|f(\alpha)\pm if(\beta)\|'\\ \|\alpha\pm\beta\|=\|f(\alpha\pm\beta)\|'=\|f(\alpha)\pm f(\beta)\|'\end{gathered}$$

所以$(\alpha,\beta)=(f(\alpha),f(\beta))'$.

定义. 内积空间V到V'的线性映射f如果满足

(1) f作为空间的映射是同构映射;

(2) f保内积(或保长).

则称f为内积空间V到V'的同构映射或称f为保长同构映射.

定理. 域$\mathbb{F}$上的n维内积空间与$\mathbb{F}^n$保长同构.

推论. 两个有限维内空间保长同构的充分必要条件是维数相同.

证明. 设$e_1, e_2, \cdots, e_n$是V的一组标准正交基, 对任何向量$\alpha = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in V$, 定义映射

$$\sigma : \alpha \to \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n$$

我们知道σ是空间V到$\mathbb{F}^n$上的线性同构; 下面证明σ是保长的. 由于

$$\|\alpha\|^2 = (\alpha, \alpha) = \sum_{i=1}^n x_i \overline{x}_i = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$$

而另一方面,

$$\sigma(\alpha) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n$$

在$\mathbb{F}^n$的标准内积下, 它的长度

$$\|\sigma(\alpha)\|^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$$

所以σ是保长同构.

定义. 设V是域$\mathbb{F}$上的内积空间, f是V到V自身上的保长线性变换, 如果$\mathbb{F}$是复数域, 则称f为酉变换(常用字母$\mathbf{U}$记), 如果$\mathbb{F}$是实数域, 则称f为正交变换(常用字母$\mathbf{O}$记).

命题. 内积空间V上的保长线性变换f是同构.

证明. 由于有限维线性空间上的线性变换单射等价于满射等价于双射, 所以我们只要证保长线性变换f是单射就行了, 对于向量$v \in \ker(f)$, 则$f(v) = \mathbf{0}$. 由于$(v, v) = (f(v), f(v)) = 0$, 所以$v = \mathbf{0}$.

定义. 设U是一个复数方阵, 如果$\overline{U}^T U = E$, 则称U为酉阵. 设O是一个实数方阵, 如果$O^T O = E$, 则称O为正交矩阵.

说明. 显然正交变换是酉变换的特殊情况, 正交矩阵是酉阵的特殊情况, 即正交变换可以看作实数域上酉变换, 正交矩阵可以看作实数域上酉矩阵.

例. 设

$$A=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1 & -1+i\\ i+1 & 1\end{pmatrix}$$

由于

$$\overline{A}^T A=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1 & 1-i\\ -1-i & 1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1 & -1+i\\ 1+i & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

所以A是酉阵.

例. 设

$$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

由于

$$A^T A=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

所以A是正交阵.

定理. 设$\mathbf{U}$是酉空间V上的线性变换, 则下面的条件是等价的.

(1) 对任何向量$v \in V$, 有$\|\mathbf{U}(v)\| = \|v\|$

(2) 对任何$\alpha, \beta \in V$, $(\mathbf{U}(\alpha), \mathbf{U}(\beta)) = (\alpha, \beta)$

(3) 如果$e_1, \cdots, e_n$是V的一组标准正交基, 则$\mathbf{U}(e_1),\cdots,\mathbf{U}(e_n)$也是$V$ 的一组标准正交基

(4) $\mathbf{U}$在任一标准正交基下的矩阵U是酉阵.

证明. (1) $\Rightarrow$(2), 由于保长线性变换一定保内积, 所以(2)成立.

(2) $\Rightarrow$(3). 因为$(\mathbf{U}(e_i), \mathbf{U}(e_j)) = (e_i, e_j) = \delta_{ij}$, 所以$\mathbf{U}(e_1), \mathbf{U}(e_i), \cdots, \mathbf{U}(e_n)$是$V$的一组标准正交基.

(3) $\Rightarrow$(4). 设$e_1, e_2, \cdots, e_n$为V的任一标准正交基，$\mathbf{U}$在这组基下的矩阵为$(a_{ij})_{n\times n}$. 则$\mathbf{U}(e_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ki}e_k \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$

$$\delta_{ij} = (\mathbf{U}(e_i), \mathbf{U}(e_j)) = (\sum_{k=1}^{n} a_{ki}e_k, \sum_{s=1}^{n} a_{sj}e_s) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\overline{a}_{kj}$$

此关系式写成矩阵形式就是

$$(\overline{a}_{ij})^T_{n\times n}(a_{ij})_{n\times n} = E$$

这说明$U = (a_{ij})$是酉阵.

(4) $\Rightarrow$(1). 在V中取定一组标准正交基$e_1, e_2, \cdots, e_n$，设$\mathbf{U}$在该基下的矩阵为$A = (a_{ij})$，则$\mathbf{U}(e_i) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ki}e_k(i = 1, 2, \cdots, n)$并且$A$是酉阵，所以

$$(\mathbf{U}(e_i), \mathbf{U}(e_j)) = (\sum_{k=1}^{n} a_{ki}e_k, \sum_{s=1}^{n} a_{sj}e_s) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\overline{a}_{kj} = \delta_{ij}$$

这说明$\mathbf{U}(e_1)\mathbf{U}(e_2), \cdots, \mathbf{U}(e_n)$是标准正交基. 对于任何向量$v \in V$，设$v = \sum\limits_{i=1}^{n} x_ie_i$，于是

$$\begin{aligned}(\mathbf{U}(v), \mathbf{U}(v)) &= (\sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{U}(e_i), \sum_{j=1}^{n} x_j\mathbf{U}(e_j)) = \sum_{i,j}^{n} x_i\overline{x}_j(\mathbf{U}(e_i), \mathbf{U}(e_j)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{x}_i = (v, v).\end{aligned}$$

命题. 满足下列条件之一的n阶方阵$U=(u_{ij})_{n\times n}$为酉阵;

(1) $\overline{U}^t U = E$;

(2) $U\overline{U}^t = E$;

(3) $\overline{U}^t = U^{-1}$;

(4) U是n维内积空间V中标准正交基与标准正交基之间的过渡矩阵.

证明. 由酉阵的定义可以得: 条件(1),(2),(3)是等价的.

设$U=(u_{ij})$是标准正交基$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 到基$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$的过渡矩阵, 则$\beta_j=\sum\limits_{i=1}^n u_{ij}\alpha_i$, 于是

$$(\beta_i,\beta_j)=(\sum_{l=1}^n u_{lj}\alpha_l,\sum_{t=1}^n u_{tj}\alpha_t)=\sum_{l=1}^n\sum_{t=1}^n u_{lj}\overline{u}_{tj}(\alpha_l,\alpha_t)=\sum_{l=1}^n\sum_{t=1}^n u_{lj}\overline{u}_{tj}\delta_{lt}=(\overline{U}^T U)_{ij}$$

由此推出U是酉阵的充要条件$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$是标准正交基. 因此当$U$是$n$维内积空间$V$中标准正交基与标准正交基之间的过渡矩阵时, 则$U$是酉阵, 反之当$U$是酉阵时, 则$U$是$n$维内积空间$V$中标准正交基与标准正交基之间的过渡矩阵.

命题. (1) 酉变换(酉阵)的乘积仍为酉变换(酉阵).

(2) 酉变换(酉阵)的逆变换(逆阵)仍为酉变换(酉阵).

证明. 设$\mathbf{U}_1$和$\mathbf{U}_2$是内积空间V上的两个酉变换, 则对于任意$v \in V$

$$\|\mathbf{U}_1\mathbf{U}_2(v)\| = \|\mathbf{U}_1(\mathbf{U}_2(v))\| = \|\mathbf{U}_2(v)\| = \|v\|$$

所以$\mathbf{U}_1\mathbf{U}_2$是酉变换.

$$\|v\| = \|\mathcal{E}(v)\| = \|\mathbf{U}_1\mathbf{U}_1^{-1}(v)\| = \|\mathbf{U}_1^{-1}(v)\|$$

所以$\mathbf{U}_1^{-1}$是酉变换.

注意. 上面关于酉变换(酉矩阵)的结论对于正交阵也成立, 请同学们写出相应的结论.

命题. (1) 酉阵(正交阵)的行列式模(绝对值)为1.

(2) 酉变换(正交变换)的特征值都是模(绝对值)为1的. 对应于不同特征值的特征向量必正交.

证明. (1) 设U是酉阵, 因为$\overline{U}^tU=E$, 所以$|\overline{U}^tU|=|\overline{U}^t||U|=1$, 于是$\|U\|^2=1$.

(2) 设$\mathbf{U}$是内积空间V上的酉变换, $\lambda\neq\mu$是$\mathbf{U}$的两个不同特征值, $\alpha,\beta\in V$是相应的特征向量. 由于

$$(\alpha,\alpha)=(\mathbf{U}(\alpha),\mathbf{U}(\alpha))=\lambda\overline{\lambda}(\alpha,\alpha)$$

和特征向量是非零的, 所以$(\alpha,\alpha)\neq 0$, 因此$|\lambda|^2=\lambda\overline{\lambda}=1$. 再由于

$$(\alpha,\beta)=(\mathbf{U}(\alpha),\mathbf{U}(\beta))=(\lambda\alpha,\mu\beta)=\lambda\overline{\mu}(\alpha,\beta),$$

得$(1-\lambda\overline{\mu})(\alpha,\beta)=0$. 因为$|\mu|=1$, 所以$\overline{\mu}=\mu^{-1}$, 由于$\lambda\neq\mu$, 所以$\lambda\overline{\mu}\neq 1$. 由此推出$(\alpha,\beta)=0$.

说明. 对于正交阵O, 如果$|O|=1$, 称O决定的正交变换为旋转或第一类的; 如果$|O|=-1$, 称O为第二类的.

练习. 习题9.4:1,2,3.