高等数学A

第2章 一元函数微分学

2.3 导数的应用

2.3.8 弧微分・曲率
2.3.9 曲率圆・曲率半径

中南大学开放式精品示范课堂高等数学建设组

2. 3 导数的应用

导数的应用

- 2.3.8 弧微分·曲率
  - 弧微分
  - 弧微分计算习例1-2
  - 曲率及计算公式
  - 曲率计算习例3-5
- 2.3.9 曲率圆·曲率半径
  - 曲率圆与曲率半径
  - 曲率圆与曲率半径习例6-8
- 内容小结
- 课堂思考与练习

习题课
- 结构框图
- 内容小结
- 典型习例

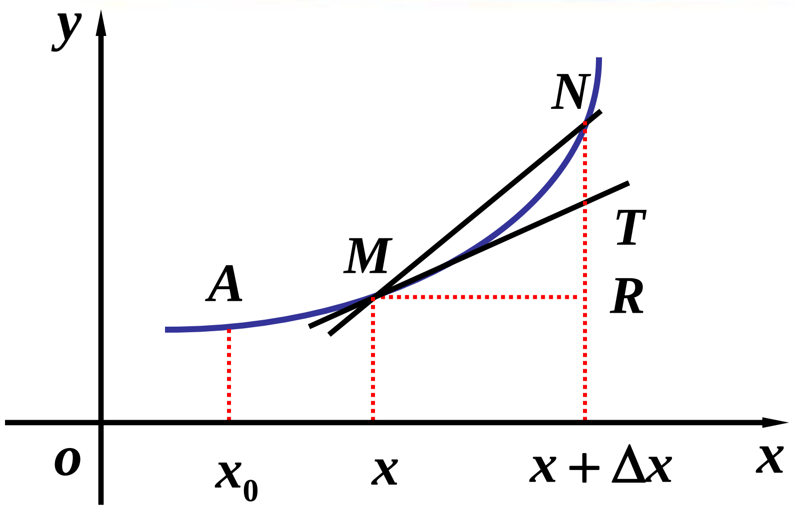
一.弧微分

1. 弧长函数

设函数$f(x)$在区间(a,b)内具有连续导数.

基点：$A(x_0,y_0)$,

$M(x,y)$为曲线上任意一点,

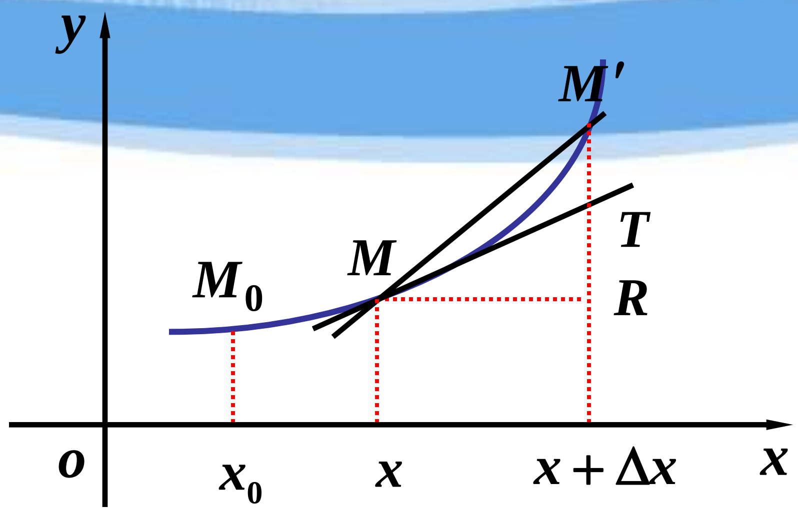


规定：(1)曲线的正向与x增大的方向一致;

(2) $|\overset{\frown}{AM}| = s$, 当$\overset{\frown}{AM}$的方向与曲线正向一致时,$s$取正号,相反时,$s$取负号.

则弧长函数$s = s(x)$是单调递增函数.

2. 弧长函数的导数与微分



用导数定义求得, 如图所示.

当由$x \to x+\Delta x$时,曲线由$M \to M'$.

则$\Delta s = \overset{\frown}{M_0M'} - \overset{\frown}{M_0M} = \overset{\frown}{MM'}$

$$\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = \left(\frac{\overset{\frown}{MM'}}{\Delta x}\right)^2 = \left(\frac{\overset{\frown}{MM'}}{|MM'|}\right)^2 \cdot \frac{|MM'|^2}{(\Delta x)^2}$$

$$= \left(\frac{\overset{\frown}{MM'}}{|MM'|}\right)^2 \cdot \frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}{(\Delta x)^2} = \left(\frac{\overset{\frown}{MM'}}{|MM'|}\right)^2 \left(1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right)$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \pm\sqrt{\left(\frac{\overset{\frown}{MM'}}{|MM'|}\right)^2 \cdot \left(1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right)}$$

$$\because \lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\overset{\frown}{MM'}|}{|MM'|}=\lim_{M'\to M}\frac{|\overset{\frown}{MM'}|}{|MM'|}=1,\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'$$

$$\therefore \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta x}=\pm\lim_{\Delta x\to 0}\sqrt{\left(\frac{\overset{\frown}{MM'}}{|MM'|}\right)^2\cdot\left(1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right)}=\pm\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

又$s=s(x)$是单增函数,

$$\therefore \frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+[f'(x)]^2}$$

从而 $ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx$

弧微分公式

弧微分计算习例

例1. 设有曲线$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ (t为参数),求ds.

例2. 设有曲线$r = r(\theta)$,求ds.

例1. 设有曲线$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ (t为参数),求ds.

解: $\because dx=\varphi'(t)dt,$

$$dy=\psi'(t)dt$$

$$\therefore ds=\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}dx$$

$$=\sqrt{1+[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}]^2}\cdot\varphi'(t)dt$$

$$\therefore ds=\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}dt.$$

例2. 设有曲线$r=r(\theta)$, 求ds.

解: $\because \begin{cases} x=r(\theta)\cos\theta \\ y=r(\theta)\sin\theta \end{cases}$,

$$\frac{dx}{d\theta}=r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta,$$

$$\frac{dy}{d\theta}=r'(\theta)\sin\theta+r(\theta)\cos\theta,$$

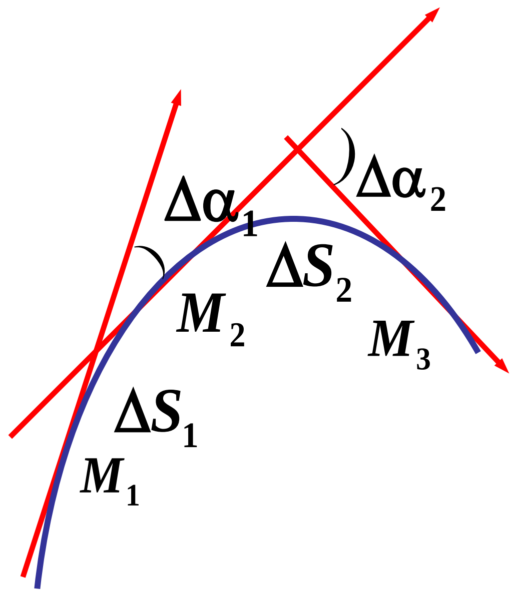
$$\therefore ds=\sqrt{[r'(\theta)]^2+[r(\theta)]^2}\,d\theta.$$

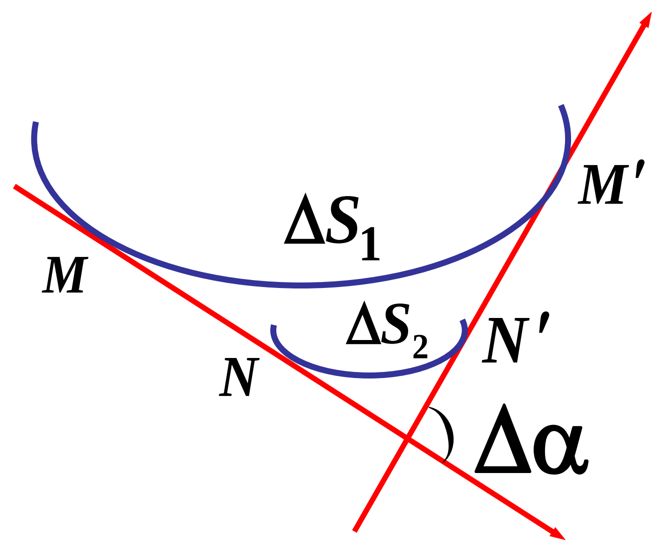
二.曲率及其计算公式

1. 曲率定义

曲率是描述曲线局部性质（弯曲程度）的量.

曲线的切线转过的角度称为转角.





弧长相同时,弧段弯曲程度越大转角越大

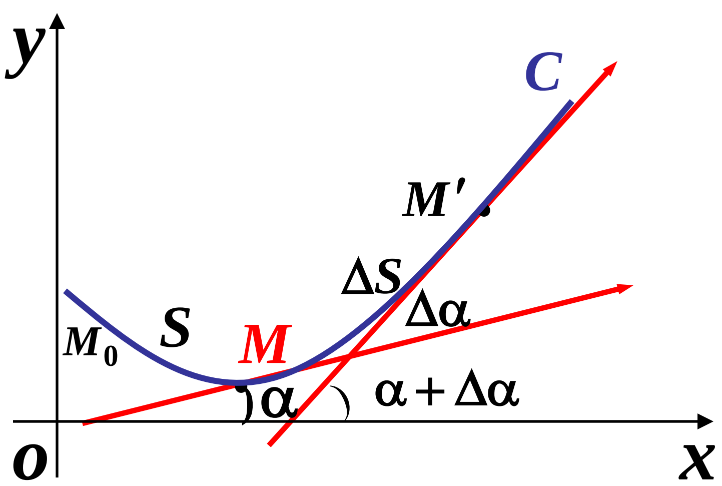
转角相同时,弧段越短弯曲程度越大

定义：设$\overset{\frown}{MM'}=\Delta s$,由$M$到$M'$的切线转角为$\Delta\alpha$,

(1) $\bar{K}=\left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$称为平均曲率;

(2) 若$\lim\limits_{\Delta s\to 0}\left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$存在,称此极限值为点$M$处的曲率.

记为 $K=\left|\dfrac{d\alpha}{ds}\right|=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|.$



注意：(1) 直线的曲率处处为零;

(2) 圆上各点处的曲率等于半径的倒数,且半径越小曲率越大.

2. 曲率的计算公式

设$y=f(x)$二阶可导,则其上任一点处的曲率为

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}.$$

证明: $\because K=\left|\frac{d\alpha}{ds}\right|$, 且 $ds=\sqrt{1+y'^2}dx.$

又 $y'=\tan\alpha,$

$$\therefore y''=\sec^2\alpha\cdot\frac{d\alpha}{dx}=(1+y'^2)\cdot\frac{d\alpha}{dx}$$

$$\therefore d\alpha=\frac{y''}{1+y'^2}dx. \quad \therefore \ K=\left|\frac{d\alpha}{ds}\right|=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}.$$

若曲线方程为参数方程: $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$

则 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3},$$

代入曲率的计算公式可得:

$$K = \frac{\left|\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)\right|}{[\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)]^{\frac{3}{2}}}.$$

曲率计算习例

例3. 求半径为R 的圆上任意点处的曲率 .

例4. 我国铁路常用立方抛物线 $y=\frac{1}{6Rl}x^3$ 作缓和曲线,

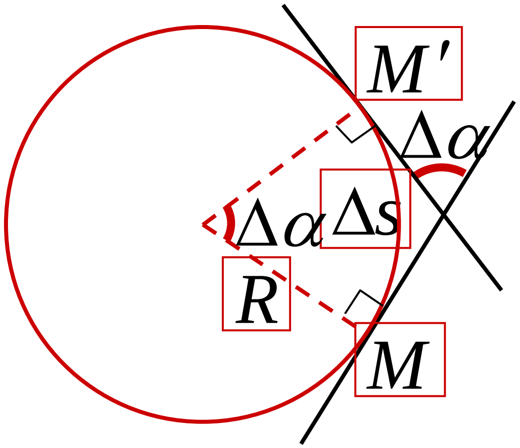
其中R是圆弧弯道的半径, l 是缓和曲线的长度, 且 $l \ll R$.

求此缓和曲线在其两个端点 $O(0,0), B(l,\frac{l^2}{6R})$ 处的曲率.

例5. 求椭圆$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$ 在何处曲率最大?

例3. 求半径为*R* 的圆上任意点处的曲率.

解: 如图所示，



$$\Delta s = R\Delta\alpha$$

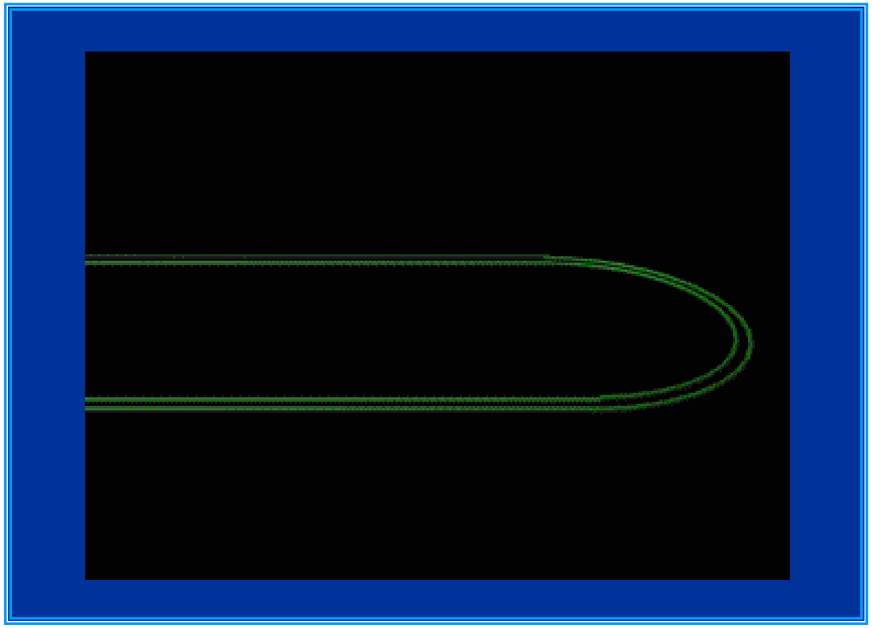
$$\therefore \quad K = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right| = \frac{1}{R}$$

可见: *R* 愈小, 则*K* 愈大，圆弧弯曲得愈厉害；

R 愈大, 则*K* 愈小，圆弧弯曲得愈小 .

例4. 我国铁路常用立方抛物线 $y=\dfrac{1}{6Rl}x^3$ 作缓和曲线，其中R是圆弧弯道的半径，l 是缓和曲线的长度，且 $l \ll R$.

求此缓和曲线在其两个端点 $O(0,0)$, $B(l, \dfrac{l^2}{6R})$ 处的曲率.



点击图片任意处播放\暂停

说明:

铁路转弯时为保证行车平稳安全,离心力必须连续变化,因此铁道的曲率应连续变化.

例4. 我国铁路常用立方抛物线 $y=\dfrac{1}{6Rl}x^3$ 作缓和曲线，其中 R 是圆弧弯道径，l 是缓和曲线的长度，且 $l \ll R$. 求此缓和曲线在其两个端点 $O(0,0)$, $B(l,\dfrac{l^2}{6R})$ 处的曲率.

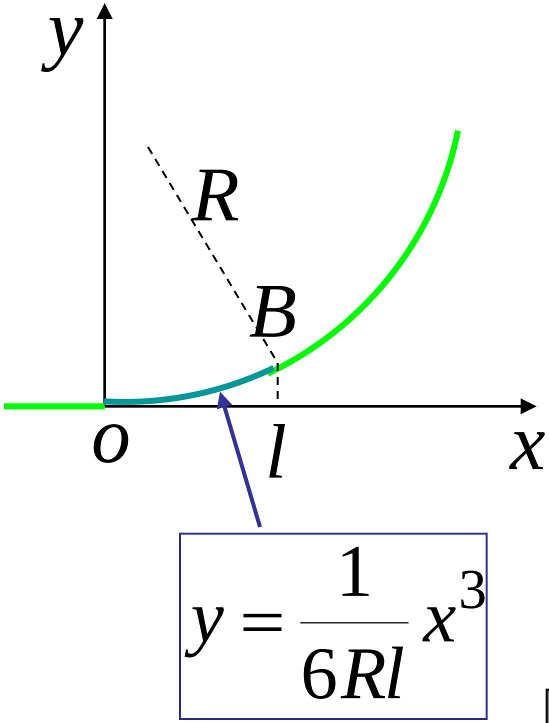
解: 当 $x\in[0,l]$ 时，

$$\because \quad y'=\frac{1}{2Rl}x^2 \le \frac{l}{2R}\approx 0$$

$$y''=\frac{1}{Rl}x$$

$$\therefore \quad K\approx\left|y''\right|=\frac{1}{Rl}x$$

显然 $K\big|_{x=0}=0$; $\quad K\big|_{x=l}\approx\dfrac{1}{R}$



例5. 求椭圆$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$在何处曲率最大?

解: $x' = -a\sin t;$ $x'' = -a\cos t$

$y' = b\cos t;$ $y'' = -b\sin t$

x' 表示对参数 t 的导数

故曲率为

$$K = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} = \frac{ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}$$

K 最大 $\rightleftarrows$ $f(t) = a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t$ 最小

求驻点:

$$f'(t) = 2a^2\sin t\cos t - 2b\cos t\sin t = (a^2 - b^2)\sin 2t$$

$$f'(t)=(a^2-b^2)\sin 2t$$

令 $f'(t)=0$, 得 $t=0,\dfrac{\pi}{2},\ \pi,\dfrac{3\pi}{2},2\pi$

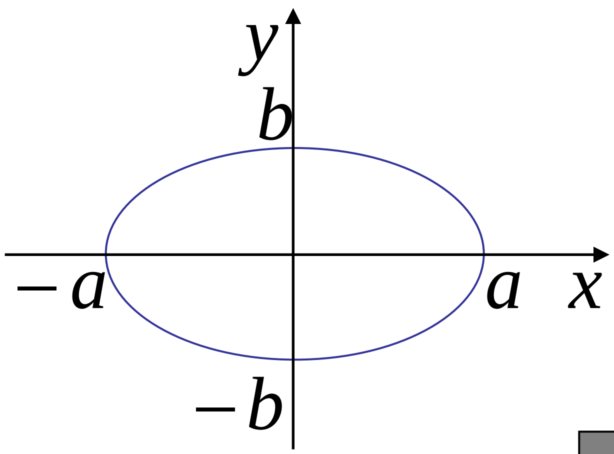
计算驻点处的函数值:

t	$\boxed{0}$	$\frac{\pi}{2}$	$\boxed{\pi}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\boxed{2\pi}$
$f(t)$	$\boxed{b^2}$	a^2	$\boxed{b^2}$	a^2	$\boxed{b^2}$

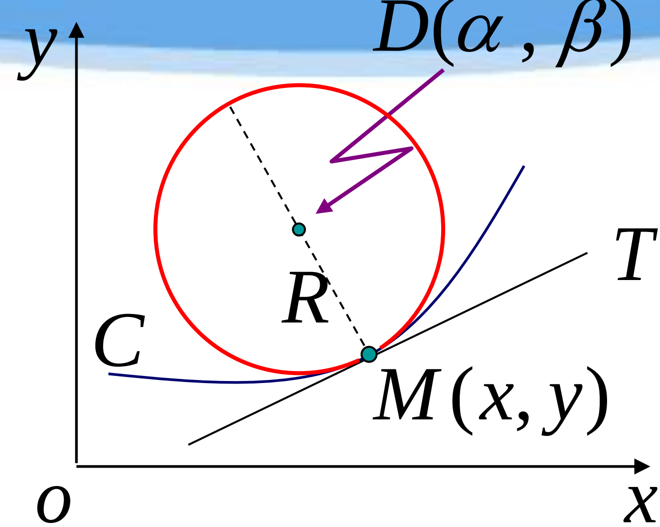
设 $0<b<a$, 则 $t=0,\pi,2\pi$ 时

$f(t)$ 取最小值, 从而 K 取最大值.

这说明椭圆在点 $(\pm a,0)$ 处曲率最大.



三、 曲率圆与曲率半径



设 M 为曲线 C 上任一点，在点 M 处作曲线的切线和法线，在曲线的凹向一侧法线上取点 D 使

$$|DM| = R = \frac{1}{K}$$

把以 D 为中心，R 为半径的圆叫做曲线在点 M 处的曲率圆（密切圆），R 叫做曲率半径，D 叫做曲率中心.

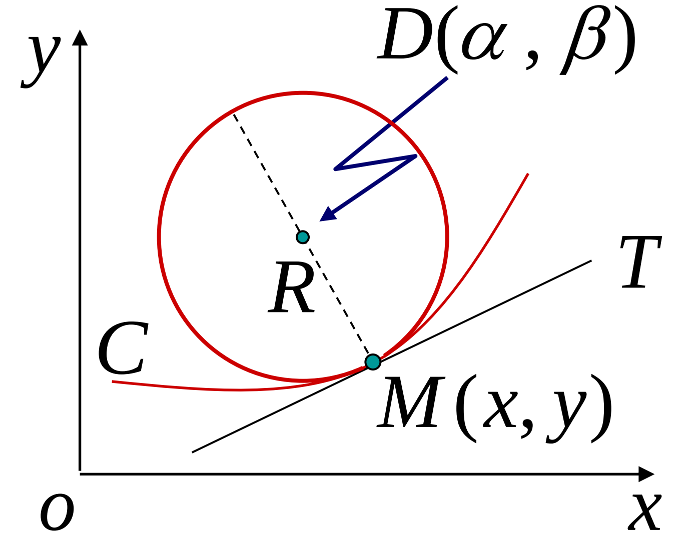
在点M 处曲率圆与曲线有下列密切关系:

(1) 有公切线;　　(2) 凹向一致;　　(3) 曲率相同.

设曲线方程为 $y=f(x)$，且 $y''\neq 0$，求曲线上点M 处的曲率半径及曲率中心 $D(\alpha,\beta)$ 的坐标公式 .

设点M 处的曲率圆方程为

$$(\xi-\alpha)^2+(\eta-\beta)^2=R^2$$



故曲率半径公式为

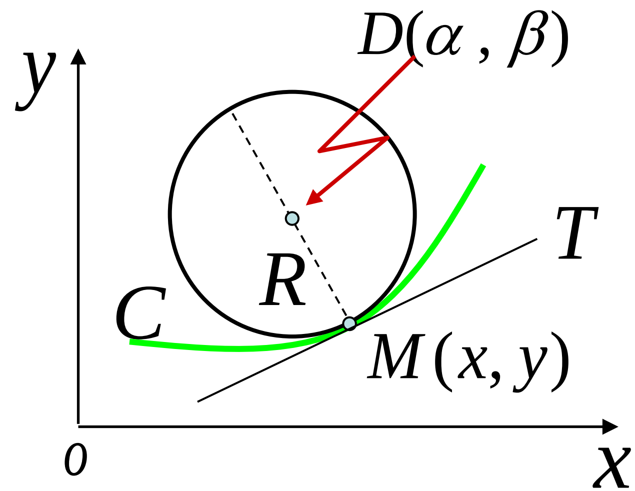
$$\boxed{R=\frac{1}{K}=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}}$$

α,β 满足方程组

$$\begin{cases}(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 & (M(x,y)\text{在曲率圆上}) \\ y'=-\dfrac{x-\alpha}{y-\beta} & (DM\perp MT)\end{cases}$$

由此可得曲率中心公式

$$\begin{cases} \alpha = x - \dfrac{y'(1+y'^2)}{y''} \\ \beta = y + \dfrac{1+y'^2}{y''} \end{cases}$$



(注意 $y-\beta$ 与 y'' 异号)

当点 $M(x,y)$ 沿曲线 $y=f(x)$ 移动时, 相应的曲率中心的轨迹 G 称为曲线 C 的**渐屈线** ,

曲线 C 称为曲线 G 的**渐伸线** .

曲率中心公式可看成渐屈线的参数方程(参数为x).

曲率圆与曲率半径习例

例6. $y = ax^2 + bx + c$上哪一点处的曲率最大?
并求出该点处的曲率半径.

例7. 设一工件内表面的截痕为一椭圆, 现要用砂轮磨削其内表面, 问选择多大的砂轮比较合适?

例8. 求摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ 的渐屈线方程 .

例6. $y=ax^2+bx+c$上哪一点处的曲率最大?
并求出该点处的曲率半径.

解: $\because y'=2ax+b, y''=2a,$

$$\therefore K=\frac{|2a|}{[1+(2ax+b)^2]^{3/2}}.$$

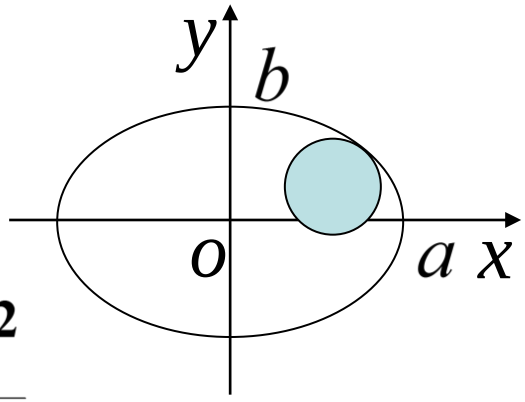
只有当$2ax+b=0$,即$x=-\dfrac{b}{2a}$时, K最大;此时$y=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

$\therefore$所求点为$(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a})$.

且该点处的曲率半径为$\rho=\dfrac{1}{K}=\dfrac{1}{|2a|}$.

例7. 设一工件内表面的截痕为一椭圆, 现要用砂轮磨削其内表面 , 问选择多大的砂轮比较合适?

解: 设椭圆方程为 $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} (0 \le x \le 2\pi\ , b \le a)$



由例3可知, 椭圆在 $(\pm a, 0)$ 处曲率最大 , 即曲率半径最小, 且为

$$R = \left. \frac{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}{ab} \right|_{t=0} = \frac{b^2}{a}$$

显然, 砂轮半径不超过 $\dfrac{b^2}{a}$ 时, 才不会产生过量磨损 , 或有的地方磨不到的问题.

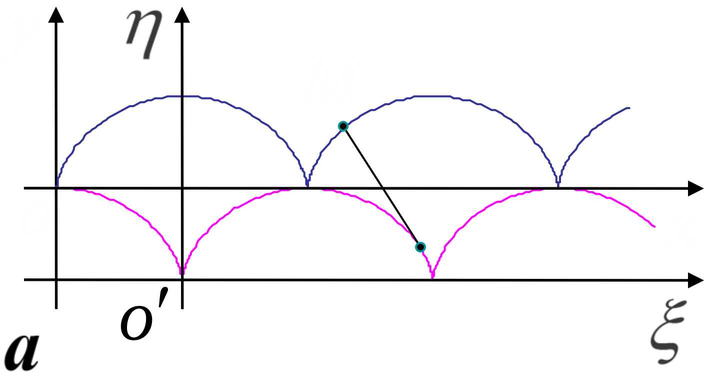
例8. 求摆线$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$的渐屈线方程.

解: $y' = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{\sin t}{1 - \cos t}$, $\quad y'' = \dfrac{\frac{d}{dt}(y')}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{-1}{a(1 - \cos t)^2}$

代入曲率中心公式, 得

$$\begin{cases} \alpha = a(t + \sin t) \\ \beta = a(\cos t - 1) \end{cases}$$

令 $t = \pi + \tau$, $\begin{cases} \xi = \alpha - \pi a \\ \eta = \beta + 2a \end{cases}$



$$\begin{cases} \xi = a(\tau - \sin \tau) \\ \eta = a(1 - \cos \tau) \end{cases}$$

(仍为摆线)

内容小结

1. 弧长微分 $\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$ **或** $\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}$

2. 曲率公式 $K=\left|\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right|=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$

3. 曲率圆

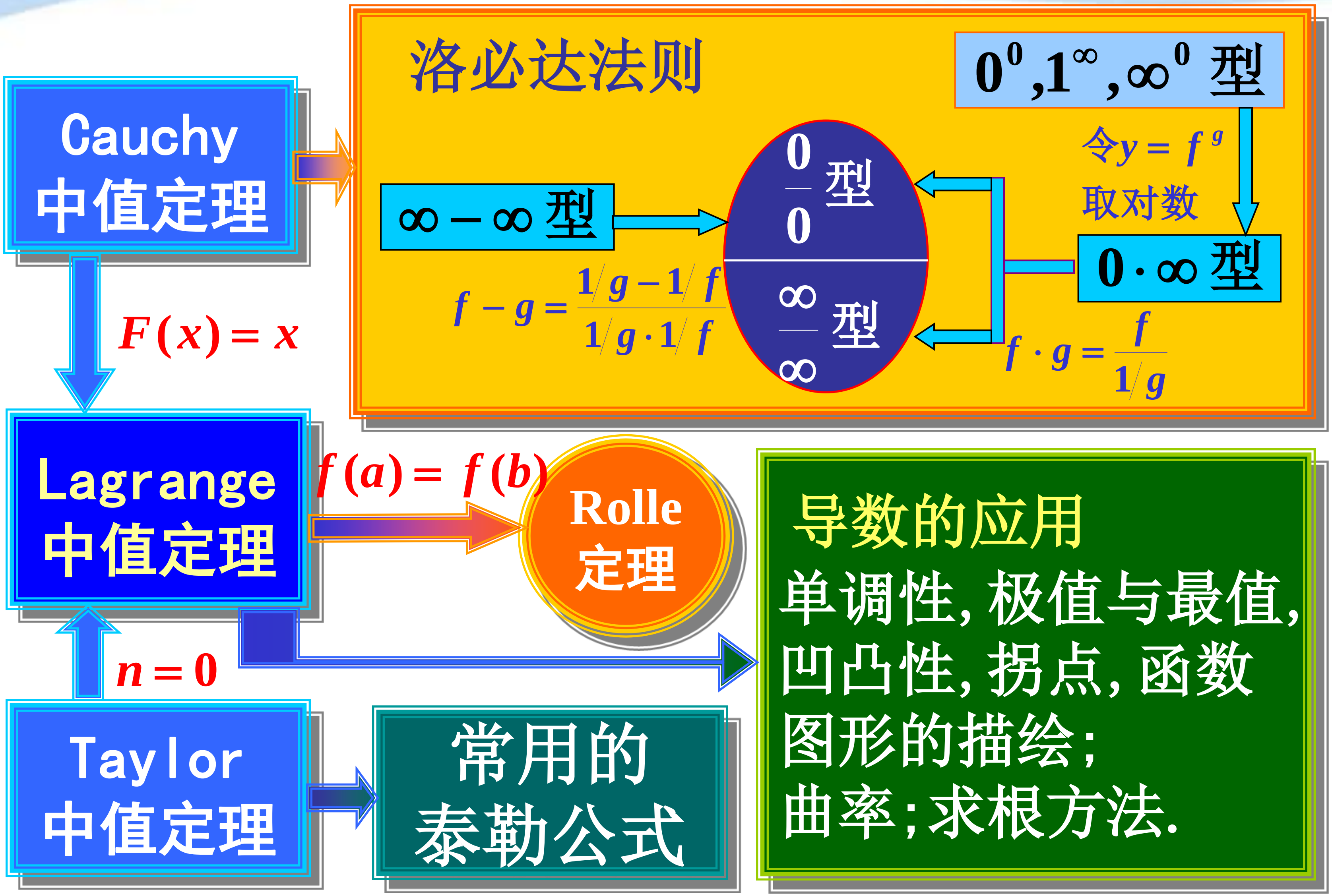
曲率半径 $R=\dfrac{1}{K}=\dfrac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}$

曲率中心 $\begin{cases}\alpha=x-\dfrac{y'(1+y'^2)}{y''}\\[2ex]\beta=y+\dfrac{1+y'^2}{y''}\end{cases}$

课堂练习： 习题2.3 第33题到第34题

练习参考答案

习题课


Cauchy
中值定理
洛必达法则
$0^0, 1^\infty, \infty^0$ 型
令$y = f^g$
取对数
$\infty - \infty$ 型
$\frac{0}{0}$ 型
$\frac{\infty}{\infty}$ 型
$0 \cdot \infty$ 型
$f - g = \frac{1/g - 1/f}{1/g \cdot 1/f}$
$f \cdot g = \frac{f}{1/g}$
$F(x) = x$
Lagrange
中值定理
$f(a) = f(b)$
Rolle
定理
导数的应用
单调性,极值与最值,
凹凸性,拐点,函数
图形的描绘;
曲率;求根方法.
$n = 0$
Taylor
中值定理
常用的
泰勒公式

一、内容小结

1. 中值定理
   - Rolle定理
   - Lagrange中值定理
   - Cauchy中值定理
   - Taylor中值定理

2. L’Hospital法则

3. 导数的应用
   - 函数单调性判别法
   - 函数极值与判别法
   - 函数图形凹凸性判别法
   - 函数图形拐点的求法
   - 函数图形渐近线的求法

4. 弧微分与曲率的计算

二、常见题型

1. 证明等式或讨论根的存在性

2. 证明不等式

3. L'Hospital法则的应用

4. 单调性与凹凸性的判定，极值与拐点的求法

5. 求待定参数

6. 应用问题的最值

7. 作图

典型习题

例1 计算极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}}{n}\right]^{nx}$,$(a_1,a_2,\cdots,a_n>0)$.

例2 计算极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt[4]{x^4-2x^3})$.

例3 计算极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}$.

例4 试确定常数a和b,使$f(x)=x-(a+b\cos x)\sin x$
为当$x\to0$时关于x的5阶无穷小.

例5 设函数$f(x)$具有一阶连续导数，$f''(0)$存在，且$f(0)=0$，

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

(1)确定a使$g(x)$处处连续；

(2)对以上所确定的a，证明$g(x)$具有一阶连续导数.

例6 设$f''(x)<0$，$f(0)=0$，证明：当$0<a\leq b$时，

$f(a+b)<f(a)+f(b)$.

例7 设$f(x)$在$[a,b]$上连续可导,且满足$f'(x)>\dfrac{f(a)}{a-b}$, $f(a)<0$,证明方程$f(x)=0$在(a,b)内有且仅有一根.

例8 设$f(x)$在$[0,2]$上连续,在$(0,2)$内可导,且$f(2)=5f(0)$,证明存在$\xi\in(0,2)$,使得$(1+\xi^2)f'(\xi)=2\xi f(\xi)$.

例9 试证当$x>0$时,$(x^2-1)\ln x\geq(x-1)^2$.

例10 设函数$f(x)$二阶可导,满足$f(0)=1, f'(0)=0,$
且对任意$x \geq 0$有$f''(x)-5f'(x)+6f(x)>0.$
证明:对任意$x>0$有$f(x)>3e^{2x}-2e^{3x}.$

例11 一房地产公司有50套公寓要出租,当月租金为1000元时,公寓会全部租出去;当月租金每增加50元时,就会多一套公寓租不出去,而租出去的公寓每月花费100元的维修费.试问房租定为多少可获得最大收入.

例1 计算极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}}{n}\right]^{nx}$，$(a_1,a_2,\cdots,a_n>0)$.

解　设 $y=\left[\dfrac{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}}{n}\right]^{nx}$

$$\ln y = nx[\ln(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}})-\ln n]$$

$$\lim_{x\to\infty}\ln y = \lim_{x\to\infty} nx[\ln(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}})-\ln n]$$

$$\overset{t=\frac{1}{x}}{===} n\lim_{t\to 0}\frac{\ln(a_1^t+a_2^t+\cdots+a_n^t)-\ln n}{t}$$

$$= n\lim_{t\to 0}\frac{a_1^t\ln a_1+a_2^t\ln a_2+\cdots+a_n^t\ln a_n}{a_1^t+a_2^t+\cdots+a_n^t}$$

$$= \ln a_1a_2\cdots a_n$$

$\therefore$ 原式$= a_1a_2\cdots a_n$

例2 计算极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt[4]{x^4-2x^3})$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt[4]{x^4-2x^3})$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}}-\sqrt[4]{1-\frac{2}{x}}\right)$$

$$\overset{x=\frac{1}{t}}{=\!=\!=\!=}\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt[3]{1+3t}-\sqrt[4]{1-2t}}{t}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\left[(1+3t)^{-\frac{2}{3}}+\frac{1}{2}(1-2t)^{-\frac{3}{4}}\right]=\frac{3}{2}.$$

例3 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}$.

解1 $$\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}}{x^2(\cos x-e^{x^2})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{2x(\cos x-e^{x^2})+x^2(-\sin x-2xe^{x^2})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{2(\cos x-e^{x^2})+x(-\sin x-2xe^{x^2})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{2(\cos x - e^{x^2}) - x(\sin x + 2xe^{x^2})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{-2(\sin x + 2xe^{x^2}) - (\sin x + 2xe^{x^2}) - x(\cos x + 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{-3\sin x - 6xe^{x^2} - x(\cos x + 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{-\frac{3\sin x}{x} - 6e^{x^2} - (\cos x + 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2})} = -\frac{1}{12}.$$

解2 $\because \sqrt{1+x^2}=(1+x^2)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2!}\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)x^4+o(x^4)$

$$=1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^4),$$

$$\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2),$$

$$e^{x^2}=1+x^2+o(x^2),$$

$$\sin x^2\sim x^2 \quad (x\to 0\text{时}),$$

$$\therefore 1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}=\frac{1}{8}x^4+o(x^4),$$

$$(\cos x-e^{x^2})\sin x^2=-\frac{3}{2}x^4+o(x^4),$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{8}x^4+o(x^4)}{-\frac{3}{2}x^4+o(x^4)}=-\frac{1}{12}.$$

例4 试确定常数a和b,使$f(x)=x-(a+b\cos x)\sin x$为当$x\to 0$时关于x的5阶无穷小.

解 利用泰勒公式得:

$$f(x)=x-(a+b\cos x)\sin x$$

$$=x-[a+b(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4))][x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)]$$

$$=(1-a-b)x+(\frac{a+b}{3!}+\frac{b}{2!})x^3-(\frac{a+b}{5!}-\frac{b}{3!})x^5+o(x^5)$$

由于$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^5}=1$,

$$\text{因此}\begin{cases} 1-a-b=0 \\ \dfrac{a+b}{3!}+\dfrac{b}{2!}=0 \end{cases}$$

$$\therefore a=\frac{4}{3}, b=-\frac{1}{3}.$$

例5 设函数$f(x)$具有一阶连续导数,$f''(0)$存在,且$f(0)=0$,

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

(1)确定a使$g(x)$处处连续;

(2)对以上所确定的a,证明$g(x)$具有一阶连续导数.

解 (1) $\because g(0)=a$,

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$$

$\therefore$当$a=f'(0)$时,$g(x)$处处连续.

(2)当$x \neq 0$时，$g'(x) = [\frac{f(x)}{x}]' = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$

当$x = 0$时，$g'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{f(x)}{x} - f'(0)}{x}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - xf'(0)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{2x} = \frac{f''(0)}{2}$$

$$\therefore g'(x) = \begin{cases} \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}, & x \neq 0 \\ \frac{f''(0)}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

且 $\lim\limits_{x\to 0} g'(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{xf'(x) - xf'(0) + xf'(0) - f(x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} - \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - xf'(0)}{x^2}$$

$$= f''(0) - \lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{2x}$$

$$= f''(0) - \frac{1}{2} f''(0) = \frac{1}{2} f''(0)$$

即 $\lim\limits_{x\to 0} g'(x) = g'(0)$, 即$g(x)$具有一阶连续导数.

例6 设$f''(x)<0$, $f(0)=0$, 证明：当$0<a\le b$时,

$$f(a+b)<f(a)+f(b).$$

证 在$[0,a]$上应用Lagrange中值定理得,

$$f(a)-f(0)=f'(\xi_1)a \qquad (0<\xi_1<a)$$

在$[b,a+b]$上应用Lagrange中值定理得,

$$f(a+b)-f(b)=f'(\xi_2)a \qquad (b<\xi_2<a+b)$$

$\because f''(x)<0$, $\therefore f'(x)$单调递减, 故 $f'(\xi_1)>f'(\xi_2)$.

$$\therefore f(a)-f(a+b)+f(b)=[f'(\xi_1)-f'(\xi_2)]a>0$$

即 $f(a+b)<f(a)+f(b)$.

例7 设$f(x)$在$[a,b]$上连续可导，且满足$f'(x) > \dfrac{f(a)}{a-b}$，

$f(a) < 0$，证明方程$f(x)=0$在(a,b)内有且仅有一根.

证 $\because \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi) > \dfrac{f(a)}{a-b}$，

$\therefore f(b) > 0$， 又$f(a) < 0$， 由零点定理可知，

方程$f(x)=0$在(a,b)内至少存在一个根；

而$f'(x) > \dfrac{f(a)}{a-b} = \dfrac{-f(a)}{b-a} > 0$， $f(x)$单调递增，

方程$f(x)=0$在(a,b)内至多存在一个根；

$\therefore$方程$f(x)=0$在(a,b)内有且仅有一个根.

例8 设$f(x)$在$[0,2]$上连续,在$(0,2)$内可导,且$f(2)=5f(0)$,证明存在$\xi\in(0,2)$,使得$(1+\xi^2)f'(\xi)=2\xi f(\xi)$.

分析 是两个函数轮流求导的差,则考虑一个分式函数如下

证 设$F(x)=\dfrac{f(x)}{1+x^2}$,则$F(x)$在$[0,2]$上连续,在$(0,2)$内可导,

且$F(0)=f(0)$, $F(2)=\dfrac{f(2)}{5}=f(0)=F(0)$

由$Rolle$定理,至少存在一点$\xi\in(0,2)$使得$F'(\xi)=0$

$$\text{即}F'(\xi)=\left.\frac{(1+x^2)f'(x)-2xf(x)}{(1+x^2)^2}\right|_{x=\xi}=0$$

$(1+\xi^2)f'(\xi)-2\xi f(\xi)=0$, $\therefore(1+\xi^2)f'(\xi)=2\xi f(\xi)$.

例9 试证当$x>0$时,$(x^2-1)\ln x \geq (x-1)^2$.

证 令$f(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2$, $f(1)=0$,

$$f'(x)=2x\ln x-x+2-\frac{1}{x}, \quad f'(1)=0,$$

$$f''(x)=2\ln x+1+\frac{1}{x^2}, \quad f''(1)=2,$$

$$f'''(x)=\frac{2(x^2-1)}{x^3},$$

可见,当$0 < x < 1$时$f'''(x) < 0$,当$1 < x < +\infty$时$f'''(x) > 0$.

因此,当$0 < x < +\infty$时, $f''(x) \geq f''(1) = 2 > 0$.

又由$f'(1) = 0$及$f'(x)$是单调增函数推知,

当$0 < x < 1$时$f'(x) < 0$,当$1 < x < +\infty$时$f'(x) > 0$.

因此,当$0 < x < +\infty$时, $f(x) \geq f(1) = 0$.

故证得当$x > 0$时,$(x^2 - 1)\ln x \geq (x-1)^2$.

例10 设函数$f(x)$二阶可导,满足$f(0)=1, f'(0)=0$,

且对任意$x\geq 0$有$f''(x)-5f'(x)+6f(x)>0$.

证明:对任意$x>0$有$f(x)>3e^{2x}-2e^{3x}$.

证 令$G(x)=e^{-3x}[f'(x)-2f(x)]$

则$G'(x)=e^{-3x}[f''(x)-5f'(x)+6f(x)]>0$

$\therefore G(x)$单调递增.

当$x>0$时,$G(x)>G(0)=-2$

即$e^{-3x}[f'(x)-2f(x)]>-2$

$$e^{-2x}[f'(x)-2f(x)]>-2e^{x}$$

$$e^{-2x}[f'(x)-2f(x)]+2e^{x}>0$$

$$[e^{-2x}f(x)]'+(2e^{x})'>0$$

$$[e^{-2x}f(x)+2e^{x}]'>0$$

则函数$F(x)=e^{-2x}f(x)+2e^{x}$单调递增.

当$x>0$时,$F(x)>F(0)=3$

$$\therefore e^{-2x}f(x)+2e^{x}>3$$

从而 $f(x)>3e^{2x}-2e^{3x}$.

例11 一房地产公司有50套公寓要出租,当月租金为1000元时,公寓会全部租出去;当月租金每增加50元时,就会多一套公寓租不出去,而租出去的公寓每月花费100元的维修费.试问房租定为多少可获得最大收入.

解 设租金为x元($x \geq 1000$), 则有 $\dfrac{x-1000}{50}$ 套租不出去,

从而可租出去 $50-\dfrac{x-1000}{50}=70-\dfrac{x}{50}$ 套,

每套租出去后净收入 $x-100$元,

故总收入为 $y=(x-100)(70-\frac{x}{50})=-\frac{x^2}{50}+72x-7000$,

当$x=1800$时, y取得最大值.