高等数学A

第3章 一元函数积分学

3.1 不定积分

3.1.4 换元积分法
3.1.5 分部积分法

中南大学开放式精品示范课堂高等数学建设组

3.1 不定积分

换元积分法与分部积分法

- 3.1.4 不定积分的换元积分法
  - 第二换元积分法积分法
  - 换元积分法习例1-5
- 3.1.5 不定积分的分部积分法
  - 分部积分法
  - 分部积分法习例6-19
- 小结与思考题

一、第二换元积分法

设 $x=\psi(t)$ 是单调的、可导的函数，

并且 $\psi'(t)\neq 0$，又设 $f[\psi(t)]\psi'(t)$ 具有原函数，

则有换元公式 $\int f(x)dx=\left[\int f[\psi(t)]\psi'(t)dt\right]_{t=\overline{\psi}(x)}$

其中 $\overline{\psi}(x)$ 是 $x=\psi(t)$ 的反函数.

应用过程:

$$\int f(x)dx \overset{x=\psi(t)}{=\!=\!=\!=} \int f[\psi(t)]\cdot\psi'(t)dt=\int g(t)dt=\Phi(t)+C$$

$$\overset{t=\overline{\psi}(x)}{=\!=\!=\!=}\Phi[\overline{\psi(x)}]+C.$$

第二换元积分法习例

例1 计算 $\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}dx$

例2 计算 $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx.$

例3 计算 $\int \frac{1}{x(x^7+2)}dx$

例4 计算 $\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2+1}}dx.$

例5 计算 $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}dx.$

积分中为了消去根式并不一定采用三角代换，需根据被积函数的情况来定.

例1 计算 $\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}dx$ （三角代换很繁琐）

解(1) 令 $t=\sqrt{1+x^2} \Rightarrow x^2=t^2-1, \quad xdx=tdt,$

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int \frac{x^4}{\sqrt{1+x^2}}xdx$$

$$=\int \frac{(t^2-1)^2}{t}tdt=\int (t^4-2t^2+1)dt=\frac{1}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+t+C$$

$$=\frac{1}{5}(1+x^2)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+(1+x^2)^{\frac{1}{2}}+C.$$

解(2) $$\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{x^4}{\sqrt{1+x^2}}dx^2 = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)(x^2-1)+1}{\sqrt{1+x^2}}dx^2$$

$$= \frac{1}{2}\int [\sqrt{1+x^2}(x^2-1) + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}]dx^2$$

$$= \frac{1}{2}\int [\sqrt{1+x^2}(x^2+1-2) + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}]dx^2$$

$$= \frac{1}{2}\int [(x^2+1)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{1+x^2}) + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}]d(1+x^2)$$

$$= \frac{1}{5}(1+x^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + (1+x^2)^{\frac{1}{2}} + C.$$

例2 计算 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx.$

解 令 $t=\sqrt{1+e^x} \Rightarrow e^x = t^2-1,$

$$x=\ln(t^2-1), \quad dx=\frac{2t}{t^2-1}dt,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx=\int\frac{2}{t^2-1}dt=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$

$$=\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right|+C=2\ln\left|\sqrt{1+e^x}-1\right|-x+C.$$

当分母的阶较高时, 可采用倒代换 $x=\frac{1}{t}$.

例3 计算 $\int\frac{1}{x(x^7+2)}dx$

解 令 $x=\frac{1}{t}$ $\Rightarrow dx=-\frac{1}{t^2}dt$,

$$\int\frac{1}{x(x^7+2)}dx=\int\frac{t}{\left(\frac{1}{t}\right)^7+2}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=-\int\frac{t^6}{1+2t^7}dt$$

$$=-\frac{1}{14}\ln|1+2t^7|+C=-\frac{1}{14}\ln|2+x^7|+\frac{1}{2}\ln|x|+C.$$

例4 计算 $\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2+1}}dx.$ （分母的阶较高）

解 令 $x=\frac{1}{t}$ $\Rightarrow dx=-\frac{1}{t^2}dt,$

$$\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2+1}}dx=\int \frac{1}{\left(\frac{1}{t}\right)^4\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2+1}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$=-\int \frac{t^3}{\sqrt{1+t^2}}dt=-\frac{1}{2}\int \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}dt^2$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{1+t^2-1}{\sqrt{1+t^2}}dt^2$$

$$= -\frac{1}{2}\int \left(\sqrt{1+t^2} - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)d(1+t^2)$$

$$= -\frac{1}{3}(\sqrt{1+t^2})^3 + \sqrt{1+t^2} + C$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)^3 + \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C.$$

当被积函数含有两种或两种以上的根式 $\sqrt[k]{x},\cdots,\sqrt[l]{x}$ 时,可采用令 $x=t^n$(其中 n 为各根指数的最小公倍数)

例5 计算 $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}dx.$

解 令 $x=t^6\Rightarrow dx=6t^5dt,$

$$\int\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}dx=\int\frac{6t^5}{t^3(1+t^2)}dt=\int\frac{6t^2}{1+t^2}dt$$

$$=6\int\frac{t^2+1-1}{1+t^2}dt=6\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt$$

$$=6[t-\arctan t]+C=6[\sqrt[6]{x}-\arctan\sqrt[6]{x}]+C.$$

二、不定积分的分部积分法

问题 $\int xe^x dx = ?$

$\int xde^x$ 和 $\int e^x dx$ 哪一个计算简单？

解决思路 利用两个函数乘积的求导法则可将 $\int xde^x$ 化为容易积分的 $\int e^x dx$ 形式.

$$dxe^x = e^x dx + xde^x$$

即 $$xde^x = dxe^x - e^x dx$$

两边积分，得

$$\int xe^x dx = \int xde^x = \int dxe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

设函数$u=u(x)$和$v=v(x)$具有连续导数,

$$(uv)'=u'v+uv', \qquad uv'=(uv)'-u'v,$$

$$\int uv'dx=\int (uv)'dx-\int u'vdx,$$

$$\int uv'dx=uv-\int u'vdx, \qquad \int udv=uv-\int vdu.$$

定理 设$u=u(x),v=v(x)$具有连续导数,则有分部积分公式

$$\int udv=uv-\int vdu.$$

注意 (1)分部积分法用于求两类不同函数乘积的积分.

(2)用分部积分法计算的不定积分类型常见的有:

$$\int x^k e^{\alpha x} dx, \qquad \int x^k \ln^m x dx, \qquad \int x^k \sin ax dx,$$

$$\int x^k \cos ax dx, \quad \int x^k \arctan bx dx, \quad \int e^{\alpha x} \sin bx dx.$$

(3)分部积分法与换元法经常穿插着使用.

(4)分部积分法常用来推导递推公式.

(5) $\int f(x) g'(x) dx = \int u dv = uv - \int v du.$

分部积分法习例

例6 计算 $\int x\cos x dx$.

例7 计算 $\int x^2 e^x dx$.

例8 计算 $\int x\arctan x dx$.

例9 计算 $\int (x^3+3x+1)\ln x dx$.

例10 计算 $\int e^x \sin x dx$.

例11 计算 $\int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$

例12 计算 $\int (\arcsin x)^2 dx$.

例13 计算 $\int \sin(\ln x) dx$.

例14 计算 $\int \sec^3 x dx$.

例15 计算 $\int \dfrac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

例16 计算 $\int (\ln\ln x + \dfrac{1}{\ln x})dx$.

例17 计算 $\int \dfrac{\ln x}{(1+\ln x)^2}dx$.

例18计算 $I_n = \int \dfrac{dx}{(x^2+a^2)^n} \quad (n \in N)$.

例19 设$f(x)$的一个原函数为e^{-x^2},求$\int xf'(x)dx$.

例6 计算 $\int x\cos x dx.$

解(1) 令 $u=\cos x,\quad dv=xdx=d\left(\frac{1}{2}x^2\right),$

$$\int x\cos x dx=\int \cos x d\left(\frac{1}{2}x^2\right)=\frac{x^2}{2}\cos x+\int \frac{x^2}{2}\sin x dx$$

显然，u,v' 选择不当，积分更难进行.

解(2) 令 $u=x,\quad dv=\cos x dx=d(\sin x),$

$$\int x\cos x dx=\int x d\sin x=x\sin x-\int \sin x dx$$

$$=x\sin x+\cos x+C.$$

例7 计算 $\int x^2e^xdx.$

解 $u=x^2,\quad dv=e^xdx=de^x,$

$$\int x^2e^xdx=\int x^2de^x=x^2e^x-2\int xe^xdx$$

（再次使用分部积分法） $u=x,\ dv=e^xdx=de^x$

$$=x^2e^x-2(xe^x-e^x)+C.$$

$$\int x^2e^xdx=\int x^2de^x=x^2e^x-2\int xe^xdx=x^2e^x-2\int xde^x$$

$$=x^2e^x-2(xe^x-\int e^xdx)=x^2e^x-2(xe^x-e^x)+C.$$

总结 若被积函数是幂函数和正(余)弦函数或幂函数和指数函数的乘积，就考虑设幂函数为 u, 使其降幂一次(假定幂指数是正整数)

例8 计算 $\int x\arctan x dx.$

解 令 $u=\arctan x$, $dv = xdx = d(\frac{x^2}{2})$,

$$\int x\arctan x dx = \int \arctan x d(\frac{1}{2}x^2)$$

$$= \frac{x^2}{2}\arctan x - \int \frac{x^2}{2} d(\arctan x)$$

$$= \frac{x^2}{2}\arctan x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\arctan x - \int \frac{1}{2}\cdot(1-\frac{1}{1+x^2})dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}(x-\arctan x)+C.$$

例9 计算 $\int(x^3+3x+1)\ln x dx.$

解 $\int(x^3+3x+1)\ln x dx=\int\ln x d(\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2+x)$

$$=(\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2+x)\ln x-\int(\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2+x)\frac{1}{x}dx$$

$$=(\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2+x)\ln x-\int(\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{2}x+1)dx$$

$$=(\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2+x)\ln x-\frac{1}{16}x^4-\frac{3}{4}x^2-x+C.$$

总结 若被积函数是幂函数和对数函数或幂函数和反三角函数的乘积，就考虑设对数函数或反三角函数为 u.

例10 计算 $\int e^x \sin x dx.$

解 $\boxed{\int e^x \sin x dx} = \int \sin x de^x = e^x \sin x - \int e^x d(\sin x)$

$$= e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int \cos x de^x$$

$$= e^x \sin x - (e^x \cos x - \int e^x d\cos x)$$

$$= e^x (\sin x - \cos x) - \boxed{\int e^x \sin x dx}$$ 注意循环形式

$$\therefore \int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C.$$

总结 若被积函数是指数函数与三角函数乘积时，可任意令u，但要两次使用分部积分，且u的设法相同.

解题技巧:

选取 u 及 v' 的一般方法：

把被积函数视为两个函数之积，按 "反对幂指三" 的顺序，前者为 u 后者为 v'.

反对幂三指

反: 反三角函数
对: 对数函数
幂: 幂函数
指: 指数函数
三: 三角函数

反对不要碰，三指动一动

例11 求积分 $I=\int\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$.

解 $I=\int\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x=x\sqrt{x^2+a^2}-\int\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}$

$$=x\sqrt{x^2+a^2}-\int\frac{(x^2+a^2-a^2)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$=x\sqrt{x^2+a^2}-\int\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x+a^2\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$=x\sqrt{x^2+a^2}-I\ +a^2\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}\,|$$

$$\therefore I=\int\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}\,|+C.$$

例12 计算 $\int(\arcsin x)^2dx$.

方法1 $\int(\arcsin x)^2dx = x(\arcsin x)^2 - \int xd(\arcsin x)^2$

$$= x(\arcsin x)^2 - 2\int\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= x(\arcsin x)^2 + 2\int\arcsin x d\sqrt{1-x^2}$$

$$= x(\arcsin x)^2 + 2(\sqrt{1-x^2}\arcsin x - \int\sqrt{1-x^2}d\arcsin x)$$

$$= x(\arcsin x)^2 + 2(\sqrt{1-x^2}\arcsin x - \int dx)$$

$$= x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C.$$

方法2 $\int(\arcsin x)^2dx \overset{t=\arcsin x}{\underset{x=\sin t}{=\!=\!=\!=}} \int t^2\cos t\,dt = \int t^2 d\sin t$

$$= t^2\sin t - 2\int t\sin t\,dt = t^2\sin t + 2\int t\,d\cos t$$

$$= t^2\sin t + 2\left(t\cos t - \int\cos t\,dt\right)$$

$$= t^2\sin t + 2t\cos t - 2\sin t + C$$

$$\overset{t=\arcsin x}{=\!=\!=\!=} x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C.$$

总结 若被积函数是超越函数(指数函数,对数函数,三角函数,反三角函数)时，直接令超越函数为u.

例13 计算 $\int \sin(\ln x)dx$.

解 $\boxed{\int \sin(\ln x)dx} = x\sin(\ln x) - \int xd[\sin(\ln x)]$

$$= x\sin(\ln x) - \int x\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$= x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)dx$$

$$= x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) + \int xd[\cos(\ln x)]$$

$$= x[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] - \boxed{\int \sin(\ln x)dx}$$

$$\therefore \int \sin(\ln x)dx = \frac{x}{2}[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C.$$

例14 计算 $\int \sec^3 x dx$.

解 $\boxed{\int \sec^3 x dx} = \int \sec^2 x \sec x dx = \int \sec x d \tan x$

$= \sec x \tan x - \int \tan^2 x \sec x dx$

$= \sec x \tan x - \int (\sec^2 x - 1) \sec x dx$

$= \sec x \tan x - \int (\sec^3 x - \sec x) dx$

$= \sec x \tan x - \boxed{\int \sec^3 x dx} + \int \sec x dx$

$\therefore \int \sec^3 x dx = \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \int \sec x dx$

$= \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| + C.$

例15 计算 $\int \frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}dx.$

解 $\because \quad \left(\sqrt{1+x^2}\right)' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$

$$\therefore \quad \int \frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int \arctan x d\sqrt{1+x^2}$$

$$= \sqrt{1+x^2}\arctan x - \int \sqrt{1+x^2}d(\arctan x)$$

$$= \sqrt{1+x^2}\arctan x - \int \sqrt{1+x^2}\cdot\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= \sqrt{1+x^2}\arctan x - \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \sqrt{1+x^2}\arctan x - \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + C.$$

例16 计算 $\int(\ln\ln x+\frac{1}{\ln x})dx.$

解 原式 $=\int \ln\ln x dx+\int\frac{1}{\ln x}dx$

$$=x\ln\ln x-\int xd(\ln\ln x)+\int\frac{1}{\ln x}dx$$

$$=x\ln\ln x-\int x\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}dx+\int\frac{1}{\ln x}dx$$

$$=x\ln\ln x-\int\frac{1}{\ln x}dx+\int\frac{1}{\ln x}dx$$

$$=x\ln\ln x+C.$$

例17 计算 $\int \frac{\ln x}{(1+\ln x)^2}dx.$

解 原式 $=\int \frac{x\ln x}{x(1+\ln x)^2}dx = \int x\ln x d\left(-\frac{1}{1+\ln x}\right)$

$$=-\frac{x\ln x}{1+\ln x}-\int -\frac{1}{1+\ln x}d(x\ln x)$$

$$=-\frac{x\ln x}{1+\ln x}+\int \frac{\ln x+1}{1+\ln x}dx$$

$$=-\frac{x\ln x}{1+\ln x}+x+C.$$

利用分部积分法可以得到某些积分的递推公式

例18 计算 $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} \quad (n \in N)$.

解 $\because \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} = \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + 2(n-1)\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^n}dx$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + 2(n-1)\left[\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \int \frac{a^2}{(x^2+a^2)^n}dx\right]$$

即$I_{n-1} = \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + 2(n-1)\left[I_{n-1} - a^2 I_n\right]$

$$\therefore I_n = \frac{1}{2a^2(n-1)}\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1}\right]$$

且$I_1 = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C.$

例19 设$f(x)$的一个原函数为e^{-x^2}，求$\int xf'(x)dx$.

解 $\because e^{-x^2}$是$f(x)$的一个原函数，

$$\therefore f(x) = (e^{-x^2})' = -2xe^{-x^2}.$$

$$\int f(x)dx = e^{-x^2} + C_1.$$

$$\therefore \int xf'(x)dx = \int xdf(x) = xf(x) - \int f(x)dx$$

$$= -2x^2e^{-x^2} - e^{-x^2} + C.$$

小结:

第二换元法的形式还有倒代换、根式代换等其它.

分部积分题目的类型:

1) 直接分部化简积分;

2) 分部产生循环式, 由此解出积分式;

(注意: 两次分部选择的 u , v 函数类型不变, 解出积分后加 C)

3) 对含自然数 n 的积分, 通过分部积分建立递推公式.

思考题：

1. 归纳用分部积分法计算不定积分的类型.

2. 在接连几次应用分部积分公式时，应注意什么事项？