高等数学A

第3章 一元函数积分学

3.1 不定积分

3.1.9 简单无理函数的积分

中南大学开放式精品示范课堂高等数学建设组

3.1 不定积分

几类特殊函数的不定积分

- 3.1.9 简单无理函数的积分
  - 简单无理函数的积分法
  - 简单无理函数积分习例1-2
- 分段函数的不定积分习例3-6

习题课
- 结构框图
- 内容小结
- 典型习例

简单无理函数的积分法

通过运用变量代换将根号去掉

$$(1)\begin{cases}\int f(\sqrt{a^2-x^2})dx \\ \int f(\sqrt{x^2+a^2})dx \\ \int f(\sqrt{x^2-a^2})dx\end{cases} \leftarrow \text{令} \begin{cases}x=a\sin t \text{ 或 } x=a\cos t \\ x=a\tan t \text{ 或 } x=a\cot t \\ x=a\sec t \text{ 或 } x=a\csc t\end{cases}$$

$$(2)\begin{cases}\int f(\sqrt[n]{ax+b})dx \\ \int f(\sqrt[m]{x},\sqrt[n]{x})dx\end{cases} \leftarrow \text{令} \begin{cases}\sqrt[n]{ax+b}=t \\ x=t^p, p\text{为}m,n\text{的最小公倍数}\end{cases}$$

$$(3)\begin{cases}\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}dx \\ \displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{ax^2+bx+c}}dx\end{cases} \leftarrow \text{令 } x=\frac{1}{t}$$

$$(4)\int R(x,\sqrt[n]{ax+b})dx \qquad \leftarrow \text{令 } \sqrt[n]{ax+b}=t$$

$$(5)\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx \qquad \leftarrow \text{令 } \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}=t$$

简单无理函数积分习例

例1　计算 $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x-1}}$.

例2　计算 $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)}}$.

例1 计算 $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x-1}}$.

解 令 $\sqrt{x-1}=t$，则 $x=t^2+1, dx=2tdt.$

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x-1}}=\int \frac{2t}{t^2+t+1}dt=\int \frac{2t+1}{t^2+t+1}dt-\int \frac{1}{t^2+t+1}dt$$

$$=\int \frac{d(t^2+t+1)}{t^2+t+1}-\int \frac{d(t+\frac{1}{2})}{(t+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

$$=\ln\left|t^2+t+1\right|-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$$

$$=\ln\left|x+\sqrt{x-1}\right|-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{3}}+C$$

例2　计算 $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)}}$.

解 $\because\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)}}=\int\frac{1}{x-1}\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+2}}dx,$

令 $\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+2}}=t,$ 则 $x=\frac{1+2t^3}{1-t^3},dx=\frac{9t^2}{(1-t^3)^2}dt,$

$$\therefore\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)}}=\int\frac{3}{1-t^3}dt=\int(\frac{1}{1-t}+\frac{t+2}{t^2+t+1})dt$$

$$=\int\frac{dt}{1-t}+\frac{1}{2}\int\frac{2t+1}{t^2+t+1}dt+\frac{3}{2}\int\frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

$$= -\ln|1-t| + \frac{1}{2}\ln|t^2+t+1| + \sqrt{3}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C$$

$$= -\ln\left|1-\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+2}}\right| + \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt[3]{\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2} + \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+2}} + 1\right|$$

$$+ \sqrt{3}\arctan\frac{2\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+2}} + 1}{\sqrt{3}} + C.$$

分段函数积分习例

例3 计算 $\int |x|dx.$

例4 计算 $\int \max\{x^3, x^2, 1\}dx.$

例5 已知$f'(x)=\begin{cases} x^2 & x\geq 0 \\ \sin x & x<0 \end{cases}$，求$f(x)$.

例6 设$f'(\ln x)=\begin{cases} 1 & 0<x\leq 1 \\ x & x>1 \end{cases}$，且$f(0)=0$，求$f(x)$.

例3　计算 $\int |x|dx.$

解　$\because f(x)=|x|=\begin{cases} x, & x\ge 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \int |x|dx=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2+C_1, & x>0 \\ -\frac{1}{2}x^2+C_2, & x<0 \end{cases}$$

由于$f(x)=|x|$在$(-\infty,+\infty)$内连续,

所以$f(x)$的原函数在$(-\infty,+\infty)$内连续.

从而 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\frac{1}{2}x^2+C_1)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-\frac{1}{2}x^2+C_2)\Rightarrow C_1=C_2$

$$\therefore \int |x|dx=\frac{1}{2}x|x|+C.$$

例4 计算 $\int \max\{x^3, x^2, 1\}dx.$

解 $\because f(x) = \max\{x^3, x^2, 1\} = \begin{cases} x^2, & x \le -1 \\ 1, & |x| < 1 \\ x^3, & x \ge 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \int \max\{x^3, x^2, 1\}dx = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 + C_1, & x \le -1 \\ x + C_2, & |x| < 1 \\ \frac{1}{4}x^4 + C_3, & x \ge 1 \end{cases}$$

由于$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$内连续，

所以$f(x)$的原函数在$(-\infty, +\infty)$内连续.

从而 $\lim\limits_{x\to -1^-}(\frac{1}{3}x^3+C_1)=\lim\limits_{x\to -1^+}(x+C_2)$

$$\lim_{x\to 1^-}(x+C_2)=\lim_{x\to 1^+}(\frac{1}{4}x^4+C_3)$$

$$-\frac{1}{3}+C_1=-1+C_2,\quad 1+C_2=\frac{1}{4}+C_3$$

$$C_1=-\frac{2}{3}+C_2,\quad C_3=\frac{3}{4}+C_2$$

$$\therefore \int \max\{x^3,x^2,1\}dx=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}+C, & x\le -1\\ x+C, & |x|<1\\ \frac{1}{4}x^4+\frac{3}{4}+C, & x\ge 1\end{cases}$$

例5 已知$f'(x)=\begin{cases} x^2 & x\ge 0 \\ \sin x & x<0 \end{cases}$，求$f(x)$.

解 $$f(x)=\int f'(x)dx=\begin{cases} \frac{1}{3}x^3+C_1 & x>0 \\ -\cos x+C_2 & x<0 \end{cases}$$

由$f(x)$在$x=0$处连续可得 $C_1=-1+C_2$

$$\therefore\ f(x)=\begin{cases} \frac{1}{3}x^3+C & x\ge 0 \\ -\cos x+1+C & x<0 \end{cases}$$

例6 设$f'(\ln x)=\begin{cases}1 & 0<x\le 1\\ x & x>1\end{cases}$，且$f(0)=0$，求$f(x)$.

解 令$t=\ln x$，则$x=e^t$，$f'(t)=\begin{cases}1 & t\le 0\\ e^t & t>0\end{cases}$，

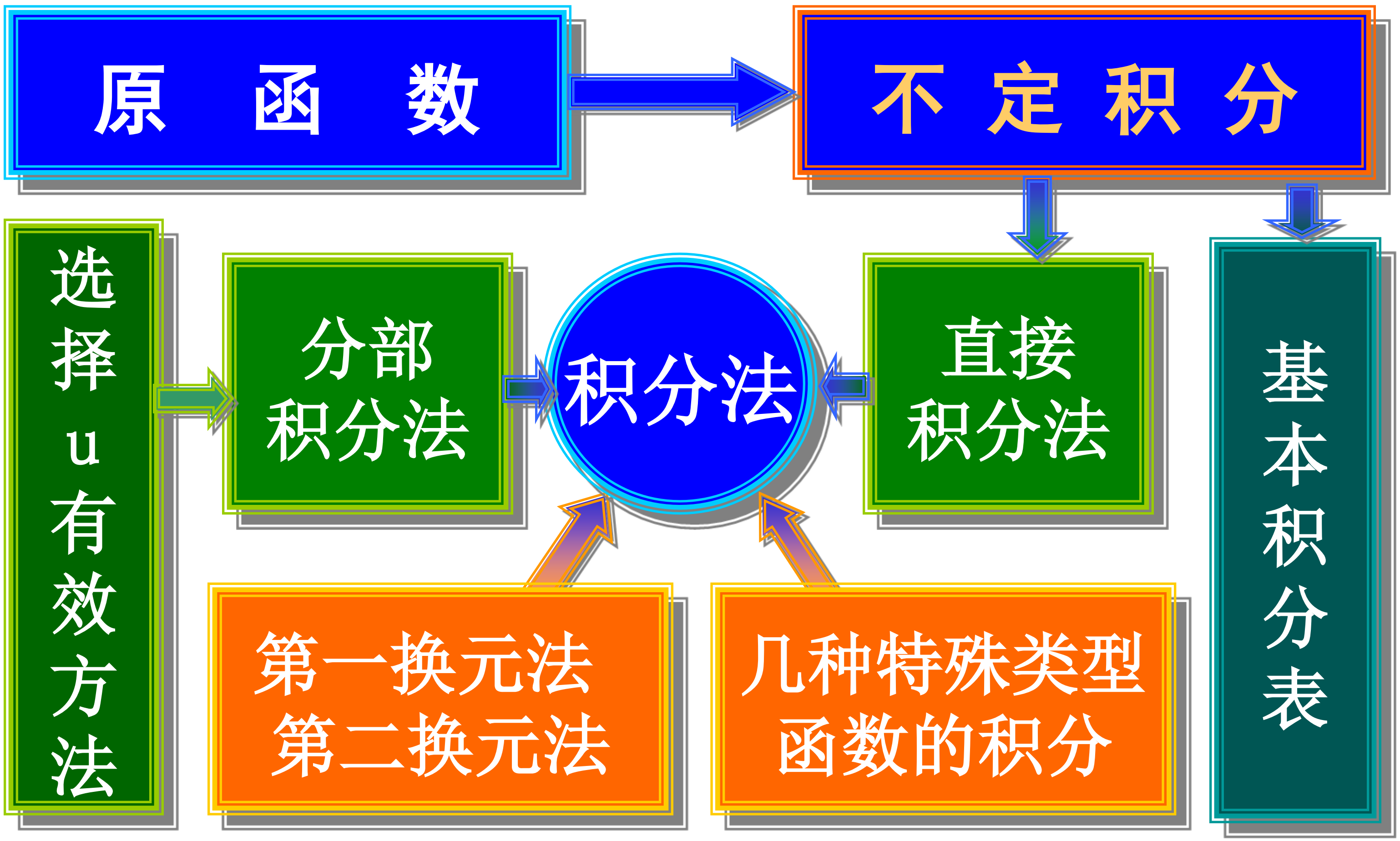
$$f(x)=\int f'(x)dx=\begin{cases}x+C_1 & x<0\\ e^x+C_2 & x>0\end{cases},$$

由$f(0+0)=f(0-0)=f(0)$得 $1+C_2=C_1=0$

$C_1=0, C_2=-1$

$$\therefore f(x)=\begin{cases}x & x\le 0\\ e^x-1 & x>0\end{cases}.$$

习题课


原　函　数
不 定 积 分
选择u有效方法
分部积分法
积分法
直接积分法
基本积分表
第一换元法
第二换元法
几种特殊类型函数的积分

一. 基本概念与性质

1. 原函数与不定积分

若在I内, $F'(x)=f(x)$或$dF(x)=f(x)dx$,

则称$F(x)$为$f(x)$在I内的一个原函数.

函数$f(x)$在区间I上的原函数全体, 称为$f(x)$在I上的不定积分. 记为 $\int f(x)dx$

若$F'(x)=f(x)$,则$\int f(x)dx=F(x)+C$

2. 不定积分的基本性质

(1) $\dfrac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right]=f(x)$,

(2) $\int F'(x)dx = F(x) + C,$

(3) $\int [k_1 f(x) \pm k_2 g(x)]dx = k_1 \int f(x)dx \pm k_2 \int g(x)dx$

二. 基本积分公式

三. 换元法与分部积分法

1. 第一换元法(凑微分法)

$$\int g(x)dx = \int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f[\varphi(x)]d\varphi(x)$$

$$\overset{u=\varphi(x)}{=\!=\!=\!=\!=} \int f(u)du = F(u) + C$$

$$\overset{u=\varphi(x)}{=\!=\!=\!=\!=} F[\varphi(x)] + C.$$

常见的一些凑微分形式:

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b)$$

$$\int f(x^n)\cdot x^{n-1}dx = \frac{1}{n}\int f(x^n)dx^n$$

$$\int f(\ln x)\cdot \frac{1}{x}dx = \int f(\ln x)d(\ln x)$$

$$\int f(\sin x)\cdot \cos x dx = \int f(\sin x)d(\sin x)$$

$$\int f(\cos x)\cdot \sin x dx = -\int f(\cos x)d(\cos x)$$

$$\int f(\tan x)\cdot \frac{1}{\cos^2 x}dx = \int f(\tan x)d(\tan x)$$

$$\int f(\cot x)\cdot\frac{1}{\sin^2 x}dx=-\int f(\cot x)d(\cot x)$$

$$\int f(\arcsin x)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int f(\arcsin x)d(\arcsin x)$$

$$\int f(\arctan x)\cdot\frac{1}{1+x^2}dx=\int f(\arctan x)d(\arctan x)$$

$$\int f(e^x)\cdot e^x dx=\int f(e^x)de^x$$

利用三角函数公式: 倍角公式与积化和差

2. 第二换元法

$$\int f(x)dx \overset{x=\psi(t)}{=\!=\!=\!=\!=} \int f[\psi(t)]\cdot\psi'(t)dt = \int g(t)dt = \Phi(t)+C$$

$$\overset{t=\overline{\psi(x)}}{=\!=\!=\!=\!=} \Phi[\overline{\psi(x)}]+C.$$

(1)一般规律如下：当被积函数中含有

(a) $\sqrt{a^2-x^2}$ 可令 $x = a\sin t$;

(b) $\sqrt{a^2+x^2}$ 可令 $x = a\tan t$;

(c) $\sqrt{x^2-a^2}$ 可令 $x = a\sec t$.

并不是所有含$\sqrt{a^2-x^2}, \sqrt{x^2+a^2}, \sqrt{x^2-a^2}$的积分都用三角代换,也可凑微分.如$\int x\sqrt{a^2-x^2}dx$.

(2)当分母的阶较高时, 可采用倒代换 $x=\frac{1}{t}$.

(3)当被积函数含有两种或两种以上的根式 $\sqrt[k]{x},\cdots,\sqrt[l]{x}$ 时,可采用令 $x=t^n$ (其中 n 为各根指数的最小公倍数)

3. 分部积分法

$$\int f(x)g(x)dx=\int udv=uv-\int vdu.$$

选择u的有效方法:LIATE选择法

L----对数函数; I----反三角函数;

A----代数函数; T----三角函数;

E----指数函数; 哪个在前哪个选作u.

注意:

(1)分部积分法用于求两类不同函数乘积的积分.

(2)用分部积分法计算的不定积分类型常见的有:

$$\int x^k e^{\alpha x} dx, \quad \int x^k \ln^m x dx, \quad \int x^k \sin ax dx,$$

$$\int x^k \cos ax dx, \quad \int x^k \arctan bx dx, \quad \int e^{\alpha x} \sin bx dx.$$

(3)分部积分法与换元法经常穿插着使用.

(4)分部积分法常用来推导递推公式.

四. 有理函数、三角函数有理式及简单无理函数的积分

1. 有理函数的积分

先把被积函数化为部分分式之和(利用待定系数法), 然后积分.

即将 $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m}$

$(a_0 \neq 0, b_0 \neq 0; a_i, b_i \in R; m, n$为非负整数).

化为已知的四种积分来作:

I. $\dfrac{A}{x-a}$;　　II. $\dfrac{A}{(x-a)^k}$;

III. $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$;　　IV. $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$.

2. 三角函数有理式的积分

(1) $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int \sin mx \cdot \cos nx dx$

或 $= \int \sin mx \cdot \sin nx dx$

或 $= \int \cos mx \cdot \cos nx dx$

方法: 用积化和差公式进行恒等变形后,再凑微分.

(2) $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int \sin^m x dx$

或 $= \int \cos^m x dx$

方法:

当m为奇数时,用$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$变形后,再凑微分;

当m为偶数时,用倍角公式降幂后,再凑微分.

(3) $\int R(\sin x,\cos x)dx=\int \sin^m x\cdot\cos^n x dx$

方法:

当m,n中有一个为奇数时,用$\sin^2 x+\cos^2 x=1$变形后,再凑微分化为有理函数的积分;

当m,n都是偶数时,用倍角公式降幂后,再凑微分.

(4) $\int R(\sin x,\cos x)dx$

方法:

$$\therefore \int R(\sin x,\cos x)dx \overset{u=\tan\frac{x}{2}}{=\!=\!=\!=} \int R\left(\frac{2u}{1+u^2},\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\cdot\frac{2}{1+u^2}du.$$

3. 简单无理函数的积分

通过运用变量代换将根号去掉

$$(1)\begin{cases}\int f(\sqrt{a^2-x^2})dx \\ \int f(\sqrt{x^2+a^2})dx \\ \int f(\sqrt{x^2-a^2})dx\end{cases} \leftarrow \text{令} \begin{cases} x=a\sin t \text{ 或 } x=a\cos t \\ x=a\tan t \text{ 或 } x=a\cot t \\ x=a\sec t \text{ 或 } x=a\csc t\end{cases}$$

$$(2)\begin{cases}\int f(\sqrt[n]{ax+b})dx \\ \int f(\sqrt[m]{x},\sqrt[n]{x})dx\end{cases} \leftarrow \text{令} \begin{cases}\sqrt[n]{ax+b}=t \\ x=t^p, p\text{为}m,n\text{的最小公倍数}\end{cases}$$

$$(3)\begin{cases}\displaystyle\int\frac{1}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}dx\\[2ex] \displaystyle\int\frac{1}{x^2\sqrt{ax^2+bx+c}}dx\end{cases}\quad\leftarrow \text{令}\ x=\frac{1}{t}$$

$$(4)\int R(x,\sqrt[n]{ax+b})dx \quad\leftarrow \text{令}\ \sqrt[n]{ax+b}=t$$

$$(5)\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx \quad\leftarrow \text{令}\ \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}=t$$

五. 常见题型习例

注意:

不是所有初等函数的不定积分或原函数(即便存在)都是初等函数. 例如

$$\int \frac{dx}{\ln x},\ \int e^{-x^2}dx,\ \int \frac{\sin x}{x}dx,\ \int \sin x^2 dx,\ \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$$

等都不能用初等函数表示, 或者习惯地说"积不出来".

"积出来"的只是很小的一部分, 而且形式变化多样, 有的技巧性也很强. 因此我们没有必要做太繁或者难的计算不定积分的题目, 应该掌握不定积分的基本计算法.

例1.计算$\int x(5x+3)^{\frac{1}{3}}dx$.

例2.计算$\int \frac{x^4+1}{x^6+1}dx$.

例3.计算$\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$.

例4.计算$\int \frac{e^{3x}+e^x}{e^{4x}-e^{2x}+1}dx$.

例5.计算$\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{1+x^4}}dx$.

例6.计算$\int \tan^4 x dx$.

例7.计算$\int \frac{dx}{x^8(1+x^2)}$.

例8.计算$\int \frac{1}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}dx$.

例9.计算$\int x^\alpha \ln x dx$. (α为常数)

例10.计算$I = \int \frac{\cos x}{a\cos x + b\sin x}dx$. $(a \neq 0, b \neq 0)$

例11.设$f'(\cos x + 2) = \sin^2 x + \tan^2 x$,求$f(x)$.

例1.计算$\int x(5x+3)^{\frac{1}{3}}dx$.

解 原式$=\dfrac{1}{5}\int[(5x+3)-3](5x+3)^{\frac{1}{3}}dx$

$$=\frac{1}{25}\int[(5x+3)-3](5x+3)^{\frac{1}{3}}d(5x+3)$$

$$=\frac{1}{25}\int(5x+3)^{\frac{4}{3}}d(5x+3)-\frac{3}{25}\int(5x+3)^{\frac{1}{3}}d(5x+3)$$

$$=\frac{1}{25}\cdot\frac{3}{7}(5x+3)^{\frac{7}{3}}-\frac{3}{25}\cdot\frac{3}{4}(5x+3)^{\frac{4}{3}}+C.$$

例2.计算$\int \frac{x^4+1}{x^6+1}dx$.

解　原式$=\int \frac{x^4+1}{(x^2)^3+1}dx = \int \frac{(x^4-x^2+1)+x^2}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}dx$

$$= \int \frac{1}{x^2+1}dx + \int \frac{x^2}{x^6+1}dx$$

$$= \int \frac{1}{x^2+1}dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{(x^3)^2+1}dx^3$$

$$= \arctan x + \frac{1}{3}\arctan x^3 + C.$$

例3.计算$\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$.

解　原式$=\int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx \quad =\int \frac{1}{(x-\frac{1}{x})^2+2}d(x-\frac{1}{x})$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan \frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}+C.$$

例4.计算$\displaystyle\int\frac{e^{3x}+e^{x}}{e^{4x}-e^{2x}+1}dx.$

解　原式$\displaystyle=\int\frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{2x}-1+e^{-2x}}dx=\int\frac{d(e^{x}-e^{-x})}{e^{2x}-1+e^{-2x}}$

$$=\int\frac{d(e^{x}-e^{-x})}{(e^{x}-e^{-x})^{2}+1}$$

$$=\arctan(e^{x}-e^{-x})+C.$$

例5.计算$\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{1+x^4}}dx.$

解 原式$=\int \frac{x^2+1}{x^2\sqrt{1+x^4}}xdx=\frac{1}{2}\int \frac{x^2+1}{x^2\sqrt{1+x^4}}dx^2$

$$\xlongequal{x^2=t}\frac{1}{2}\int \frac{t+1}{t\sqrt{1+t^2}}dt=\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt+\frac{1}{2}\int \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}}dt$$

$$\xlongequal{t=\tan u}\frac{1}{2}\ln(t+\sqrt{1+t^2})+\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sin u}du$$

$$=\frac{1}{2}\ln(t+\sqrt{1+t^2})+\frac{1}{2}\ln\left|\csc u-\cot u\right|+C=\cdots\cdots.$$

例6.计算$\int \tan^4 x dx$.

解　原式$=\int \tan^2 x(\sec^2 x-1)dx$

$$=\int \tan^2 x\sec^2 xdx+\int \tan^2 xdx$$

$$=\int \tan^2 xd\tan x+\int (\sec^2 x-1)dx$$

$$=\frac{1}{3}\tan^3 x+\tan x-x+C.$$

例7.计算$\int \frac{dx}{x^8(1+x^2)}$.

解

$$\text{原式} \xlongequal{x=\frac{1}{t}} \int \frac{t^8}{t^2+1}dt = \int \frac{t^8+t^6-t^6-t^4+t^4+t^2-t^2-1+1}{t^2+1}dt$$

$$= \int (t^6-t^4+t^2-1+\frac{1}{t^2+1})dt$$

$$= \frac{1}{7}t^7 - \frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^3 - t + \arctan t + C$$

$$= \frac{1}{7x^7} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{x} + \arctan\frac{1}{x} + C.$$

例8.计算$\int \frac{1}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}dx.$

解 当$a = 0, b \neq 0$时，原式$= \int \frac{1}{b^2\sin^2 x}dx = \frac{1}{b^2}\int \csc^2 x dx$

$$= -\frac{1}{b^2}\cot x + C.$$

当$a \neq 0, b = 0$时，原式$= \int \frac{1}{a^2\cos^2 x}dx = \frac{1}{a^2}\int \sec^2 x dx$

$$= \frac{1}{a^2}\tan x + C.$$

当$a\neq 0, b\neq 0$时,

$$原式=\int\frac{1}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}dx$$

$$=\int\frac{\sec^2 x}{a^2+b^2\tan^2 x}dx=\int\frac{1}{a^2+b^2\tan^2 x}d\tan x$$

$$=\frac{1}{b}\int\frac{1}{a^2+(b\tan x)^2}d(b\tan x)$$

$$=\frac{1}{ab}\arctan\frac{b\tan x}{a}+C.$$

例9.计算$\int x^{\alpha}\ln x dx.$ （α为常数）

解 当$\alpha=-1$时，原式$=\int\frac{\ln x}{x}dx=\int\ln x d\ln x=\frac{1}{2}(\ln x)^2+C.$

当$\alpha\neq-1$时，原式$=\int x^{\alpha}\ln x dx=\int\ln x d(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1})$

$$=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln x-\int\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}d\ln x=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln x-\int\frac{x^{\alpha}}{\alpha+1}dx$$

$$=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln x-\frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}+C$$

例10.计算$I=\int\frac{\cos x}{a\cos x+b\sin x}dx. \quad (a\neq 0,b\neq 0)$

解　记$J=\int\frac{\sin x}{a\cos x+b\sin x}dx$

$$aI+bJ=\int\frac{a\cos x+b\sin x}{a\cos x+b\sin x}dx=x+C_1$$

$$bI-aJ=\int\frac{b\cos x-a\sin x}{a\cos x+b\sin x}dx=\ln|a\cos x+b\sin x|+C_2$$

$$\therefore I=\frac{1}{a^2+b^2}\left[ax+b\ln|a\cos x+b\sin x|\right]+C.$$

例11.设$f'(\cos x+2)=\sin^2 x+\tan^2 x$,求$f(x)$.

解 $\because\ f(\cos x+2)=\int f'(\cos x+2)d(\cos x+2)$

$$=\int(\sin^2 x+\tan^2 x)d(\cos x+2)$$

$$=\int(1-\cos^2 x+\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x})d\cos x$$

$$=\int(-\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x})d\cos x=-\frac{1}{3}\cos^3 x-\frac{1}{\cos x}+C$$

$$=-\frac{1}{3}[(\cos x+2)-2]^3-\frac{1}{(\cos x+2)-2}+C$$

$$\therefore\ f(x)=-\frac{1}{3}(x-2)^3-\frac{1}{x-2}+C$$