高等数学A

第5章 空间解析几何

5.4 平面与空间直线

中南大学开放式精品示范课堂高等数学建设组

5.4 平面与空间直线

5.4.1 平面及其方程

- [引 例]
- [平面的点法式方程]
- [平面的一般式方程]
- [两平面的夹角]

5.4.2 空间直线及其方程

- [引 例]
- 空间直线的一般式方程
- 空间直线的对称式方程与参数方程
- 两直线的夹角
- 直线与平面的夹角
- 补充内容1---点到直线的距离
- 补充内容2---异面直线的距离
- 补充内容3---平面束方程

5.4.1 平面及其方程

一、平面方程引例

引例：在空间直角坐标系中，平面具有什么特征？决定一个平面的要素是什么？

1、两条相交的直线决定一个平面；

2、三个不共线的点决定一个平面；

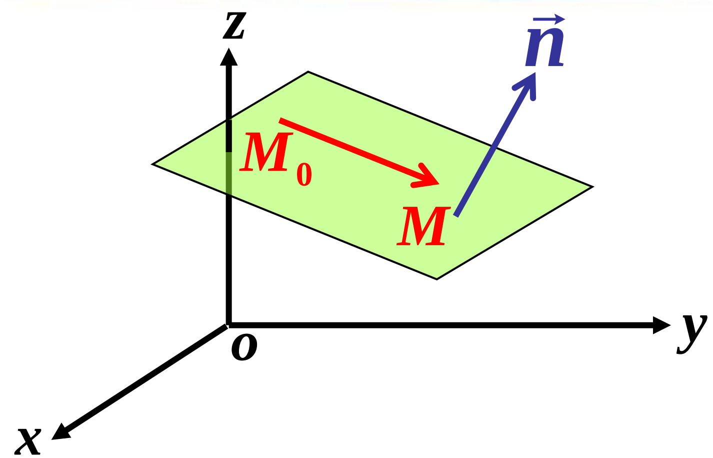
3、两条平行的直线决定一个平面。

4、任给空间中某一点，及某一方向，过该定点且垂直于给定的方向可且只可做一个平面。

以上哪种确定方式易于在空间直角坐标系中用解析式表示？

5.4.1 平面及其方程

二、 平面的点法式方程



如果一非零向量垂直于一平面，这向量就叫做该平面的**法向量**.

法向量的特征： 垂直于平面内的任一向量.

已知 $\vec{n}=\{A, B, C\}$, $M_0(x_0, y_0, z_0)$,

设平面上的任一点为 $M(x, y, z)$

必有 $\overrightarrow{M_0M}\perp\vec{n}\Rightarrow\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{n}=0$

5.4.1 平面及其方程

$\because \quad \overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0,y-y_0,z-z_0\}$

$\therefore \quad A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

平面的点法式方程

其中法向量 $\vec{n}=\{A,B,C\}$, 已知点 (x_0, y_0, z_0).

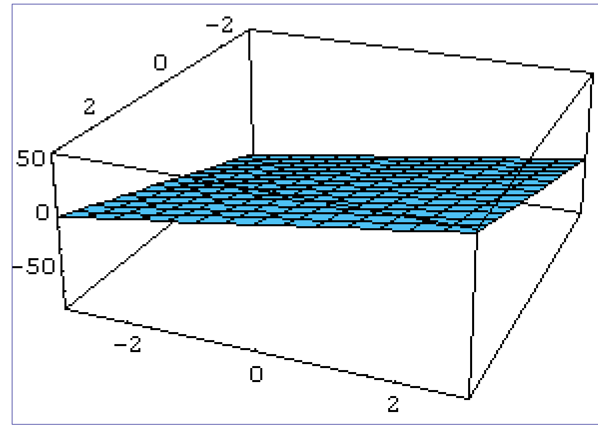
平面上的点都满足上方程，不在平面上的点都不满足上方程，上方程称为平面的方程，平面称为方程的图形.

平面点法式方程习例

例 1 求过三点$A(2,-1,4)$、$B(-1,3,-2)$和$C(0,2,3)$的平面方程.

例 2 求过点$(1,1,1)$，且垂直于平面$x-y+z=7$和$3x+2y-12z+5=0$的平面方程.

例 1 求过三点 $A(2,-1,4)$、$B(-1,3,-2)$ 和 $C(0,2,3)$ 的平面方程.



解 $\overrightarrow{AB}=\{-3,4,-6\}$

$\overrightarrow{AC}=\{-2,3,-1\}$

取 $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\{14,9,-1\}$,

所求平面方程为 $14(x-2)+9(y+1)-(z-4)=0$,

化简得 $14x+9y-z-15=0$.

一般地，设平面 π 过 M_1, M_2, M_3 三点，M_1, M_2, M_3 不共线. 即 $\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} \neq \vec{0}$.

则得平面方程为：$\overrightarrow{M_1M} \cdot (\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}) = 0$,

即

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

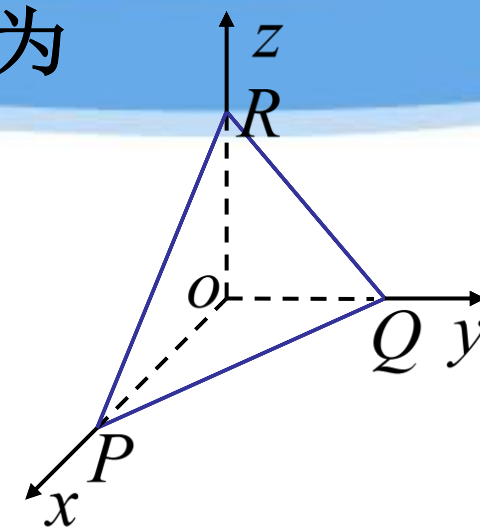
平面的三点式方程

特别, 当平面与三坐标轴的交点分别为

$$P(a,0,0)\,,\ Q(0,b,0)\,,\ R(0,0,c)$$

时, 平面方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1\ (a,b,c\neq 0)$$



此式称为平面的截距式方程.

分析:利用三点式

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix}=0$$

按第一行展开得 $(x-a)bc-y(-a)c+zab=0$

即 $bcx+acy+abz=abc$

5.4.1 平面及其方程

例 2 求过点$(1,1,1)$，且垂直于平面$x-y+z=7$和$3x+2y-12z+5=0$的平面方程.

解　$\vec{n}_1=\{1,-1,1\}$,　　$\vec{n}_2=\{3,2,-12\}$

取法向量　$\vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\{10,15,5\}$,

所求平面方程为

$$10(x-1)+15(y-1)+5(z-1)=0,$$

化简得　$2x+3y+z-6=0.$

三、平面的一般方程

由平面的点法式方程

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

$$\Rightarrow Ax+By+Cz\underbrace{\boxed{-(Ax_0+By_0+Cz_0)}}_{=D}=0$$

$$Ax+By+Cz+D=0$$ 平面的一般方程

法向量 $\vec{n}=\{A,B,C\}$.

5. 4. 1 平面及其方程

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$$

平面一般方程的几种特殊情况：

(1) $D = 0$, 平面通过坐标原点；

(2) $A = 0$, $\begin{cases} D = 0, & \text{平面通过 } x \text{ 轴；} \\ D \neq 0, & \text{平面平行于 } x \text{ 轴；} \end{cases}$

类似地可讨论 $B = 0$, $C = 0$ 情形.

(3) $A = B = 0$, 平面平行于 xoy 坐标面；

类似地可讨论 $A = C = 0$, $B = C = 0$ 情形.

平面一般式方程习例

例3　指出下列平面的位置特点，并作出图形:

(1)$x+y=4$;　(2)$z=2$.

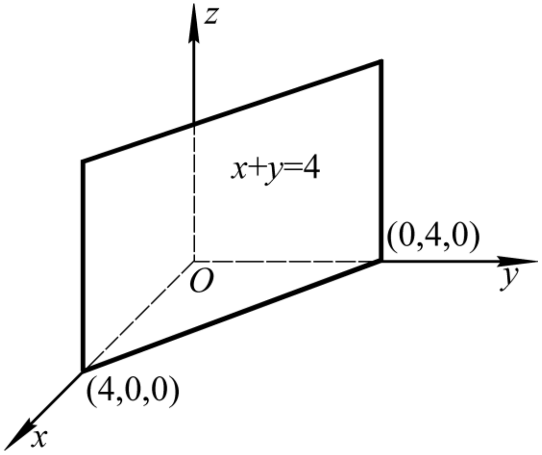
例 4　设平面过原点及点$(6,-3,2)$，且与平面$4x-y+2z=8$垂直，求此平面方程.

例 5　求平行于平面$6x+y+6z+5=0$而与三个坐标面所围成的四面体体积为一个单位的平面方程.

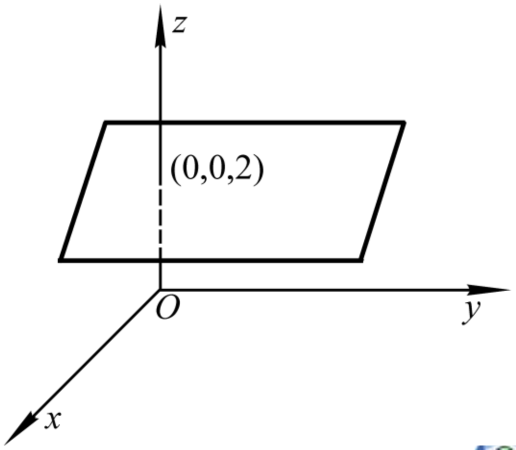
例3　指出下列平面的位置特点，并作出图形:

$(1)x+y=4$;　$(2)z=2$.

解 (1)式中不含z, 所以平面平行于z轴



(2)z=2表示过点(0,0,2)且垂直于z轴的平面



例 4 设平面过原点及点$(6,-3,2)$，且与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直，求此平面方程.

解　设平面为 $Ax+By+Cz+D=0$,

由平面过原点知 $D=0$,

由平面过点$(6,-3,2)$知 $\boxed{6A-3B+2C=0}$

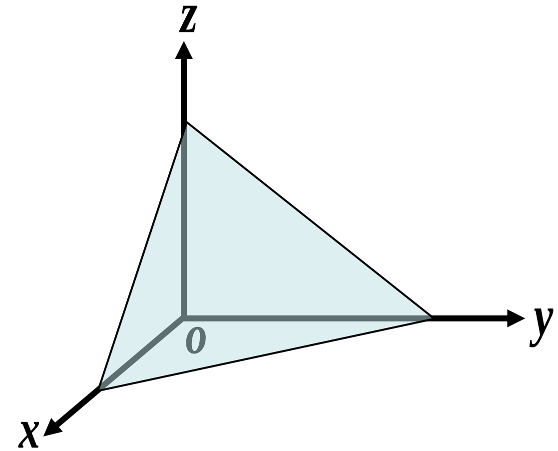
$\because \vec{n}\perp\{4,-1,2\}$, $\therefore \boxed{4A-B+2C=0}$

$$\Rightarrow A=B=-\frac{2}{3}C,$$

所求平面方程为 $2x+2y-3z=0$.

例 5 求平行于平面$6x+y+6z+5=0$而与三个坐标面所围成的四面体体积为一个单位的平面方程.

解 设平面为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1,$



$\because V=1,\quad \therefore\ \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}abc=1,$

由所求平面与已知平面平行得

（向量平行的充要条件） $\dfrac{1/a}{6}=\dfrac{1/b}{1}=\dfrac{1/c}{6},$

化简得 $\frac{1}{6a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{6c}$， 令 $\frac{1}{6a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{6c}=t$

$$\Rightarrow a=\frac{1}{6t},\quad b=\frac{1}{t},\quad c=\frac{1}{6t},$$

代入体积式

$$\therefore 1=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6t}\cdot\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{6t}\Rightarrow t=\frac{1}{6},$$

$$\therefore a=1,\quad b=6,\quad c=1,$$

所求平面方程为 $6x+y+6z=6.$

我们目前已对平面本身的解析关系描述得较清楚了. 现在讨论两平面间的关系.

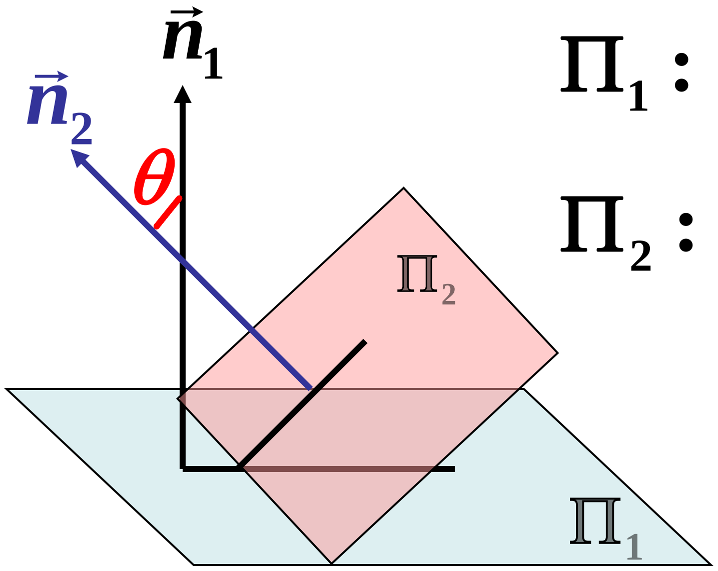
一般说来，两平面的关系有以下几种

- 两平面平行不重合. $\Rightarrow$两平面法向一致但无交点
- 两平面平行重合. $\Rightarrow$两法向一致且有交点
- 两平面不平行相交
  - 两平面垂直
  - 相交但不垂直 $\Rightarrow$两法向不共线也不垂直

桥梁 $\longrightarrow$ 法向夹角

四、两平面的夹角

定义　两平面法向量之间的夹角称为两平面的夹角.（通常取锐角）



$$\Pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$\Pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

$$\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\},$$

$$\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\},$$

5.4.1 平面及其方程

按照两向量夹角余弦公式有

$$\cos\theta = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

两平面夹角余弦公式

两平面位置特征：

(1) $\Pi_1 \perp \Pi_2 \Longleftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0;$

(2) $\Pi_1 // \Pi_2 \Longleftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}.$

特殊情形： !

平行不重合 $\Longleftrightarrow\ A_1{:}A_2=B_1{:}B_2=C_1{:}C_2\neq\ D_1{:}D_2$;

重合 $\Longleftrightarrow\ A_1{:}A_2=B_1{:}B_2=C_1{:}C_2=\ D_1{:}D_2$.

两平面的夹角习例

例6 研究以下各组里两平面的位置关系：

(1) $-x+2y-z+1=0$, $\quad y+3z-1=0$

(2) $2x-y+z-1=0$, $\quad -4x+2y-2z-1=0$

(3) $2x-y-z+1=0$, $\quad -4x+2y+2z-2=0$

例 7 设$P_0(x_0, y_0, z_0)$是平面$Ax+By+Cz+D=0$外一点，求P_0到平面的距离.

例6　研究以下各组里两平面的位置关系：

(1) $-x+2y-z+1=0,\qquad y+3z-1=0$

(2) $2x-y+z-1=0,\qquad -4x+2y-2z-1=0$

(3) $2x-y-z+1=0,\qquad -4x+2y+2z-2=0$

解　(1) $\cos\theta=\dfrac{|-1\times0+2\times1-1\times3|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+3^2}}$

$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{60}}$ 两平面相交，夹角 $\theta=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{60}}$.

(2) $\vec{n}_1 = \{2,-1,1\}$, $\vec{n}_2 = \{-4,2,-2\}$

$$\Rightarrow \frac{2}{-4} = \frac{-1}{2} = \frac{1}{-2},$$ 两平面平行

$\because M(1,1,0) \in \Pi_1 \quad M(1,1,0) \notin \Pi_2$

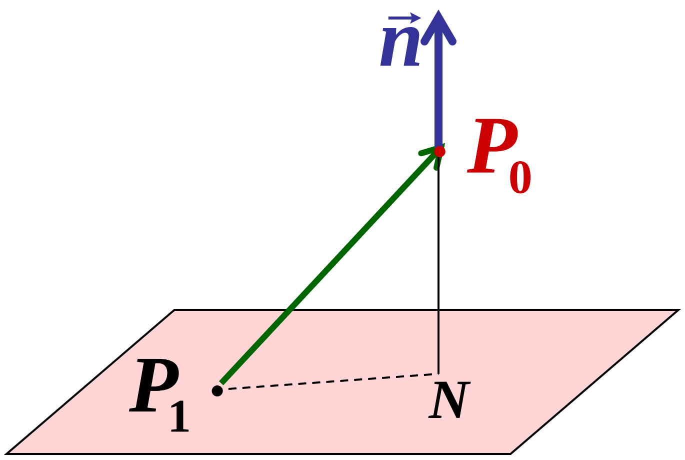
两平面平行但不重合.

(3) $\because \dfrac{2}{-4} = \dfrac{-1}{2} = \dfrac{-1}{2} = \dfrac{D_1}{D_2},$

$\therefore$ 两平面重合.

例7 设$P_0(x_0, y_0, z_0)$是平面$Ax+By+Cz+D=0$外一点，求P_0到平面的距离.

解 $\forall P_1(x_1, y_1, z_1) \in \Pi$



$$d = |\mathrm{Pr}\, j_n \overrightarrow{P_1P_0}|$$

$$\mathrm{Pr}\, j_n \overrightarrow{P_1P_0} = \overrightarrow{P_1P_0} \cdot \vec{n^0}$$

$$\overrightarrow{P_1P_0} = \{x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1\}$$

5.4.1 平面及其方程

$$\overrightarrow{n^0} = \left\{ \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \right\}$$

$$\therefore \mathrm{Pr}\ j_n \overrightarrow{P_1P_0} = \overrightarrow{P_1P_0} \cdot \overrightarrow{n^0}$$

$$= \frac{A(x_0 - x_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} + \frac{B(y_0 - y_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} + \frac{C(z_0 - z_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$= \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 - (Ax_1 + By_1 + Cz_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

5.4.1 平面及其方程

$$\because Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \qquad (P_1 \in \Pi)$$

$$\therefore \operatorname{Prj}_n \overrightarrow{P_1P_0} = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\therefore \quad d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

点到平面距离公式

F

5.4.2 空间直线及其方程

一、 空间直线方程引例

引例：直线具有什么特征？如何确定一条直线？

1、任意一条直线都可以看成是两个平面的交线.；

2、直线上任意两点的连线与一固定向量平行

3、过一个点且与一个非零向量平行决定唯一一条直线；

5.4.2 空间直线及其方程

二、空间直线的一般方程

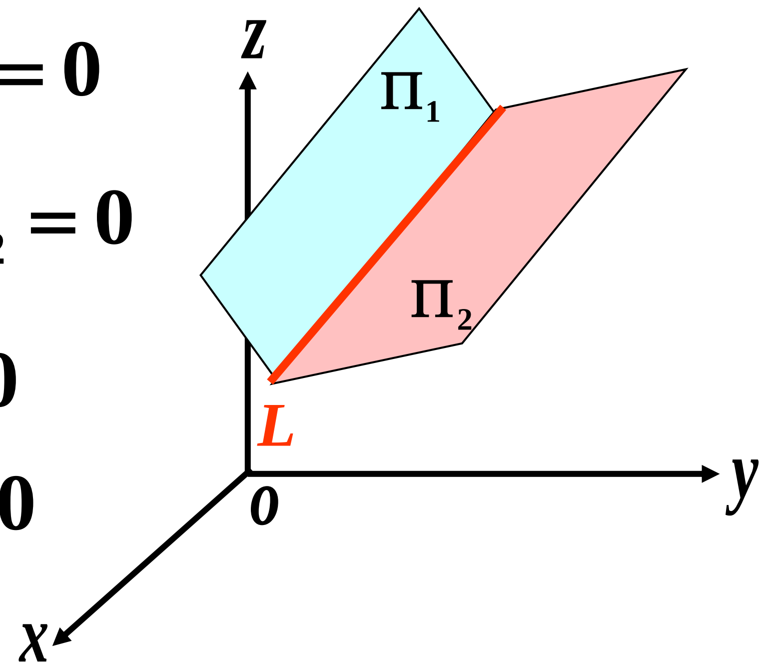
定义　空间直线可看成两平面的交线.

$$\Pi_1: \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\Pi_2: \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

空间直线的一般方程



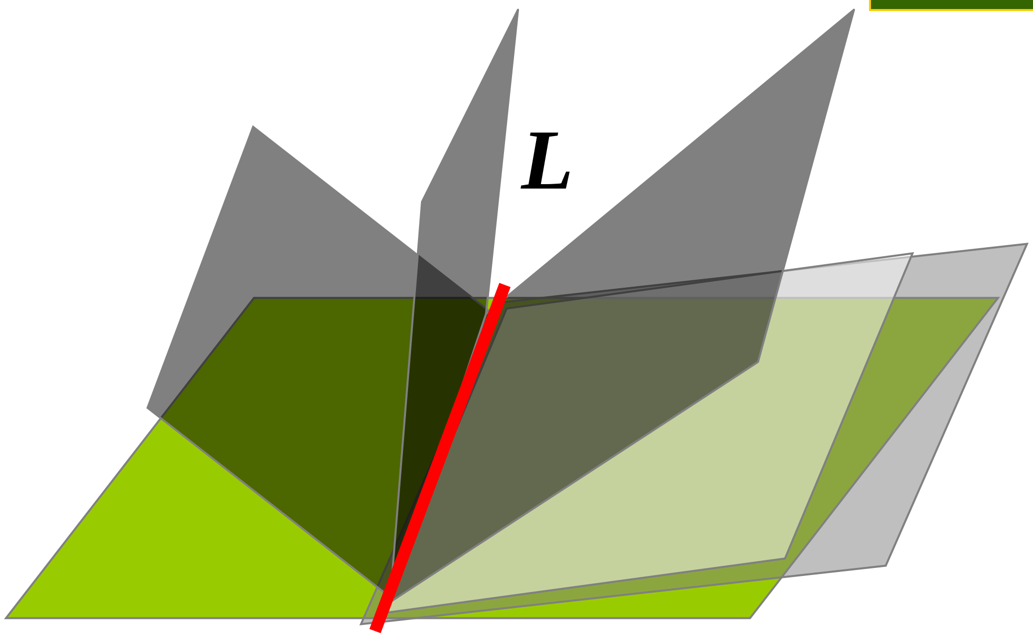
空间直线一般方程

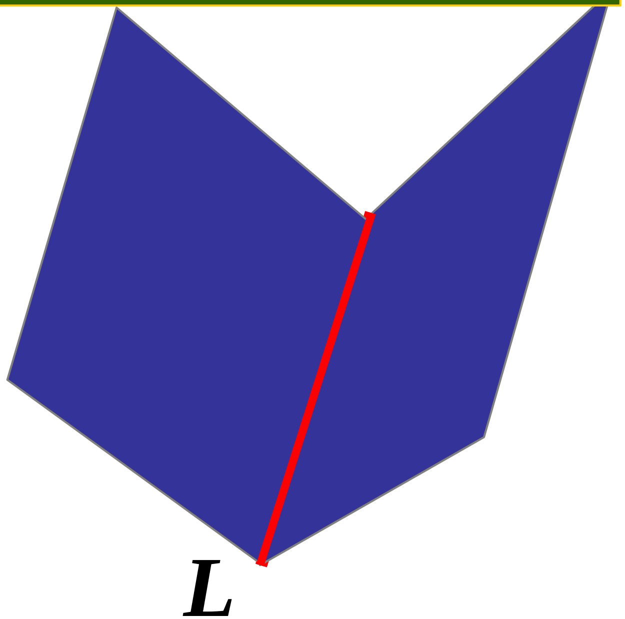
所以直线方程不唯一.

例如: $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$ 表示y轴;

$\begin{cases} x+z=0 \\ x-z=0 \end{cases}$ 也表示y轴.

- 通过空间直线L的平面
个，从中任两个方程联立
空间直线L。

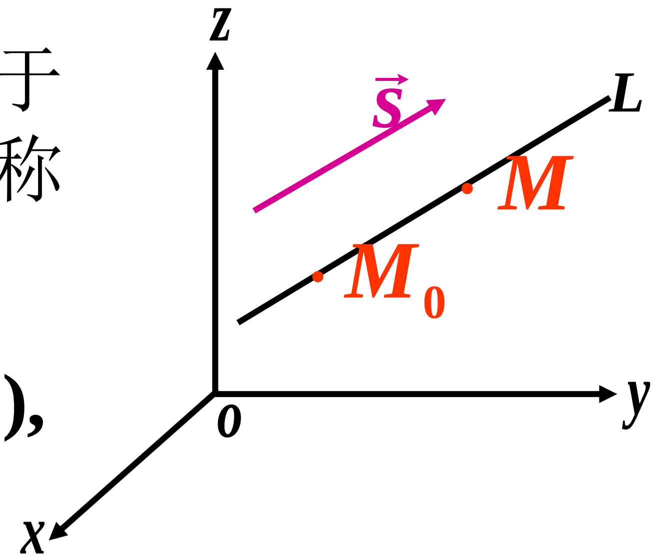




三、空间直线的对称式方程与参数方程

方向向量的定义：

如果一非零向量平行于一条已知直线，这个向量称为这条直线的方向向量.



$M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M(x, y, z)$,

$\forall\ M \in L$, $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$

$\vec{s} = \{m, n, p\}$, $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$

5.4.2 空间直线及其方程

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$ 直线的对称式方程

令 $$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$$

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

直线的一组方向数

方向向量的余弦称为直线的方向余弦.

直线的参数方程

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

说明: 某些分母为零时, 其分子也理解为零.

当$\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{p}$中有一个为0时, 例如$\boldsymbol{m}=\mathbf{0}$

这时方程应理解为 $\begin{cases} x-x_0=0 \\ \dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{p} \end{cases}$

当 $m = n = 0, p \neq 0$ 时， 直线方程

$$\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{0} = \frac{z - z_0}{p}$$

可看成

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$$

例8 用对称式方程及参数方程表示直线

$$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+3z+4=0 \end{cases}.$$

例9 求过两点$M_1(x_1,y_1,z_1)$和$M_2(x_2,y_2,z_2)$的直线的方程.

例 10 一直线过点$A(2,-3,4)$，且和y轴垂直相交，求其方程.

例8　用对称式方程及参数方程表示直线

$$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+3z+4=0 \end{cases}.$$

解　在直线上任取一点 (x_0, y_0, z_0)

取 $x_0 = 1 \Rightarrow \begin{cases} y_0+z_0+2=0 \\ y_0-3z_0-6=0 \end{cases},$

解得 $y_0 = 0,\quad z_0 = -2$

点坐标 $(1,0,-2)$,

5.4.2 空间直线及其方程

因所求直线与两平面的法向量都垂直

取 $\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\{4,-1,-3\}$,

对称式方程 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-0}{-1}=\dfrac{z+2}{-3}$,

参数方程 $\begin{cases} x=1+4t \\ y=-t \\ z=-2-3t \end{cases}$.

解题思路: 先找直线上一点;

再找直线的方向向量.

特例: 若直线的一般式方程中缺少变量，则可直接变形为点向式方程及参数式方程，例如

$$\begin{cases} 3x+2y-5=0 \\ y-3z-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x-3=-2y+2 \\ y-1=3z+3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{-3} \\ \dfrac{y-1}{3}=z+1 \end{cases} \Rightarrow \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+1}{-1} \Rightarrow \begin{cases} x=1+2t \\ y=1-3t \\ z=-1-t \end{cases}$$

例9　求过两点$M_1(x_1,y_1,z_1)$和$M_2(x_2,y_2,z_2)$的直线的方程.

解　可以取两点的方向向量

$$\vec{s}=\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$$

由直线的标准方程可知过这两点的直线

方程为$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

称为直线的两点式方程

例 10 一直线过点 $A(2,-3,4)$，且和 y 轴垂直相交，求其方程.

解 因为直线和 y 轴垂直相交,

所以交点为 $B(0,-3,0)$,

取 $\vec{s}=\overrightarrow{BA}=\{2,0,4\}$,

所求直线方程 $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+3}{0}=\dfrac{z-4}{4}$.

四、两直线的夹角

定义　两直线的方向向量的夹角称之.（锐角）

直线 L_1：$\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$,

直线 L_2：$\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$,

$$\cos(L_1 \hat{,} L_2)=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$$

两直线的夹角公式

5.4.2 空间直线及其方程

两直线的位置关系：

(1) $L_1 \perp L_2 \Longleftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0,$

(2) $L_1 \,//\, L_2 \Longleftrightarrow \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{p_1}{p_2},$

例如，直线 L_1： $\vec{s}_1 = \{1, -4, 0\},$

直线 L_2： $\vec{s}_2 = \{0, 0, 1\},$

$\because \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0, \quad \therefore \vec{s}_1 \perp \vec{s}_2,$ 即 $L_1 \perp L_2$.

习例

例 11 求过点$(-3,2,5)$且与两平面$x-4z=3$和$2x-y-5z=1$的交线平行的直线方程.

例 12 求过点$M(2,1,3)$且与直线

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$$

垂直相交的直线方程.

例 11 求过点$(-3,2,5)$且与两平面$x-4z=3$和$2x-y-5z=1$的交线平行的直线方程.

解 设所求直线的方向向量为 $\vec{s}=\{m,n,p\}$,

根据题意知 $\vec{s}\perp\vec{n}_1$, $\vec{s}\perp\vec{n}_2$,

取 $\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\{-4,-3,-1\}$,

所求直线的方程 $$\frac{x+3}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-5}{1}.$$

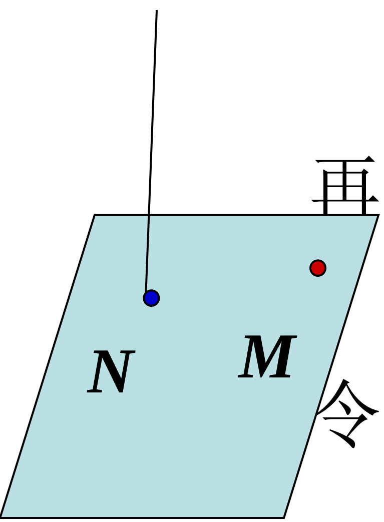
例 12 求过点$M(2,1,3)$且与直线

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$$垂直相交的直线方程.

解 先作一过点M且与已知直线垂直的平面 Π

$$3(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0$$

再求已知直线与该平面的交点N,



令 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}=t \quad \Rightarrow \begin{cases} x=3t-1 \\ y=2t+1. \\ z=-t \end{cases}$

代入平面方程得 $t=\frac{3}{7}$， 交点 $N(\frac{2}{7},\frac{13}{7},-\frac{3}{7})$

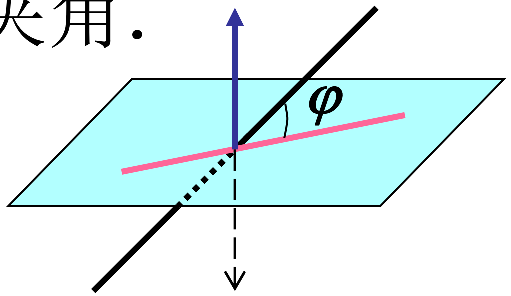
取所求直线的方向向量为 $\overrightarrow{MN}$

$$\overrightarrow{MN}=\{\frac{2}{7}-2,\frac{13}{7}-1,-\frac{3}{7}-3\}=\{-\frac{12}{7},\frac{6}{7},-\frac{24}{7}\},$$

所求直线方程为 $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{4}.$

五、直线与平面的夹角

定义 直线和它在平面上的投影直线的夹角 φ 称为直线与平面的夹角.



$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$$

$$L: \quad \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}, \quad \vec{s} = \{m, n, p\},$$

$$\Pi: \quad Ax + By + Cz + D = 0, \quad \vec{n} = \{A, B, C\},$$

$$(\vec{s}\,\hat{,}\,\vec{n}) = \frac{\pi}{2} - \varphi \qquad (\vec{s}\,\hat{,}\,\vec{n}) = \frac{\pi}{2} + \varphi$$

5.4.2 空间直线及其方程

$$\sin\varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \left|\cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)\right|.$$

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

直线与平面的夹角公式

直线与平面的位置关系：

(1) $L \perp \Pi \iff \dfrac{A}{m} = \dfrac{B}{n} = \dfrac{C}{p}.$

(2) $L \,//\, \Pi \iff Am + Bn + Cp = 0.$

例 13 设直线 $L:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$，平面 $\Pi: x-y+2z=3$，求直线与平面的夹角.

解 $\vec{n}=\{1,-1,2\}$, $\vec{s}=\{2,-1,2\}$,

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

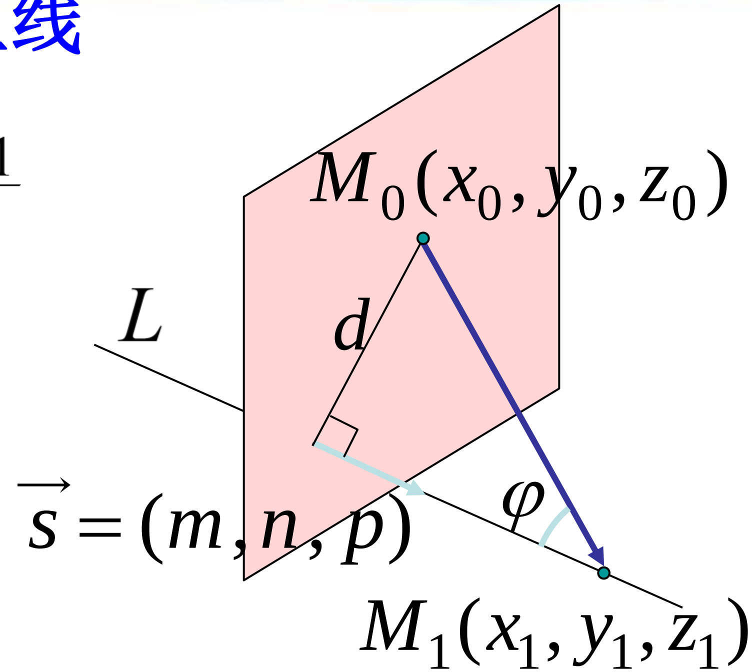
$$=\frac{|1\times2+(-1)\times(-1)+2\times2|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{9}}=\frac{7}{3\sqrt{6}}.$$

$\therefore\quad \varphi=\arcsin\dfrac{7}{3\sqrt{6}}$ 为所求夹角.

补充1　点$M_0(x_0, y_0, z_0)$到直线

$$L: \frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}$$

的距离为



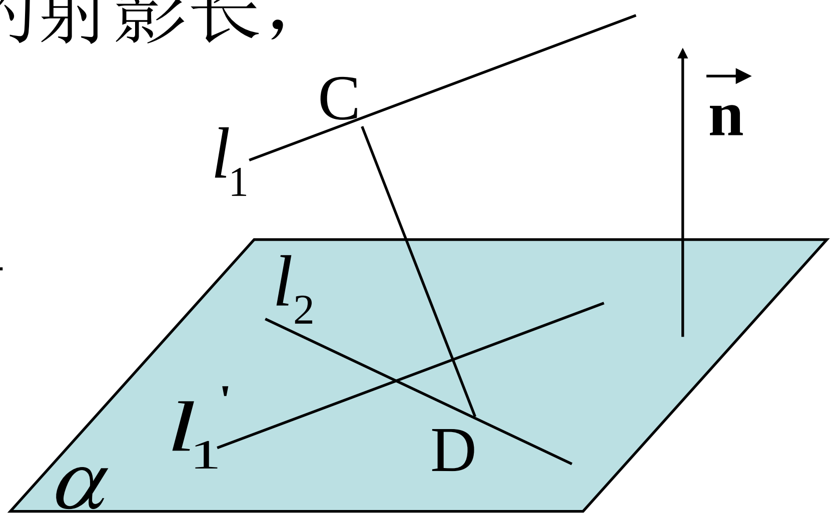
$$d = \frac{|\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ m & n & p \end{vmatrix} \right|$$

补充2 空间两条直线异面

设 l_1, l_2 为两异面直线，其公共法向量为 $\vec{\mathbf{n}}$,

C、D分别是 l_1, l_2 上任一点，则 l_1, l_2 间的距离可转化为向量 $\overrightarrow{CD}$ 在 $\vec{\mathbf{n}}$ 上的射影长，



故

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{CD} \cdot \vec{n}\right|}{\left|\vec{n}\right|} = \frac{\left|\overrightarrow{CD} \cdot (\vec{s_1} \times \vec{s_2})\right|}{\left|\vec{s_1} \times \vec{s_2}\right|}$$

$$= \frac{\left|(\vec{s_1}, \vec{s_2}, \overrightarrow{CD})\right|}{\left|\vec{s_1} \times \vec{s_2}\right|}$$

即两异面直线间的距离等于两异面直线上分别任取两点的向量和公垂线方向向量的数量积的绝对值与公垂线的方向向量模的比值.

补充3：过直线L的平面束方程

一般地，设直线 L：$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 & (1) \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 & (2) \end{cases}$

建立三元一次方程：

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda\left(A_2x+B_2y+C_2z+D_2\right)=0 \qquad (3)$$

其中λ为任意常数.对于不同的λ值，方程（3）表示过直线 L的不同的平面；反之，通过直线L的任何平面（除平面(2)外）都包含在方程（3）所表示的一族平面内. 方程（3）叫做**直线 L 的平面束方程**.

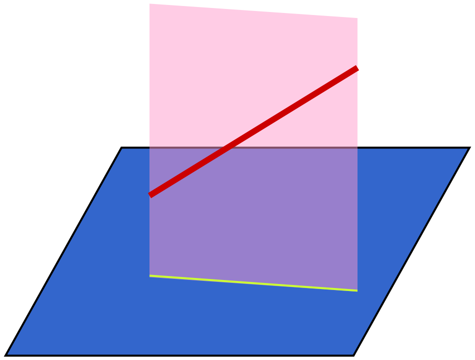
习例

例14. 求直线 $\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$ 在平面 $x+y+z=0$ 上的投影直线方程.

例15. 求过直线 ***L*:** $\begin{cases} x+5y+z=0 \\ x-z+4=0 \end{cases}$ 且与平面 $x-4y-8z+12=0$ 夹成 $\dfrac{\pi}{4}$ 角的平面方程.

例14. 求直线 $\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$ 在平面 $x+y+z=0$

上的投影直线方程.



提示：过已知直线的平面束方程

$$x+y-z-1+\lambda(x-y+z+1)=0$$

即 $(1+\lambda)x+(1-\lambda)y+(-1+\lambda)z+(-1+\lambda)=0$

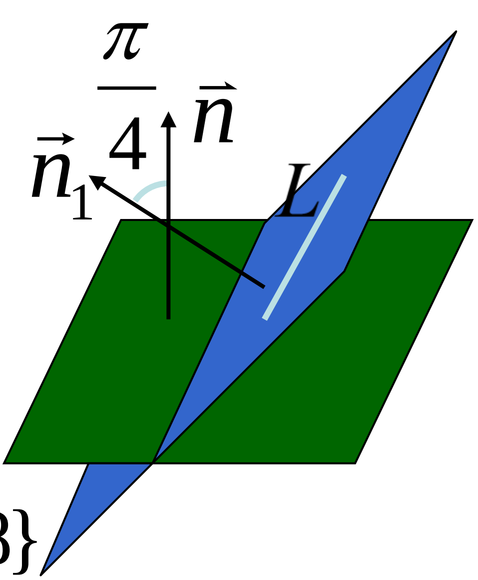
从中选择 λ 使其与已知平面垂直：

$$(1+\lambda)\cdot 1+(1-\lambda)\cdot 1+(-1+\lambda)\cdot 1=0$$

得 $\lambda=-1$, 从而得投影直线方程

$$\begin{cases} y-z-1=0 & \longleftarrow \text{这是投影平面} \\ x+y+z=0 & \longleftarrow \text{这是给定的平面} \end{cases}$$

例15. 求过直线 L: $\begin{cases} x+5y+z=0 \\ x-z+4=0 \end{cases}$ 且与平面 $x-4y-8z+12=0$ 夹成 $\frac{\pi}{4}$ 角的平面方程.



提示：过直线 L 的平面束方程

$$(1+\lambda)x+5y+(1-\lambda)z+4\lambda=0$$

其法向量为 $\vec{n}_1=\{1+\lambda,5,1-\lambda\}.$

题中所给平面的法向量为 $\vec{n}=\{1,-4,-8\}$

选择 λ 使 $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{n}_1|}{|\vec{n}||\vec{n}_1|} \Longrightarrow \lambda=-\frac{3}{4}$

从而得所求平面方程 $x+20y+7z-12=0.$

内 容 小 结

平面的方程 $\begin{cases} \text{点法式方程.} \\ \text{一般方程.} \\ \text{截距式方程.} \end{cases}$

（熟记平面的几种特殊位置的方程）

两平面的夹角.（注意两平面的位置特征）

点到平面的距离公式.

内容小结

空间直线的一般方程.

空间直线的对称式方程与参数方程.

两直线的夹角. （注意两直线的位置关系）

直线与平面的夹角.

（注意直线与平面的位置关系）

思考题1

若平面$x+ky-2z=0$与平面

$2x-3y+z=0$的夹角为$\frac{\pi}{4}$，求$k=?$

思考题1解答

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1\times 2+k\times(-3)-2\times 1}{\sqrt{1^2+k^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{-3k}{\sqrt{5+k^2}\cdot\sqrt{14}}, \Rightarrow k=\pm\frac{\sqrt{70}}{2}.$$

思考题2

在直线方程$\dfrac{x-4}{2m}=\dfrac{y}{n}=\dfrac{z-2}{6+p}$中，$m$、$n$、$p$各怎样取值时，直线与坐标面$xoy$、$yoz$都平行.

思考题2解答

$\vec{s} = \{2m, n, 6+p\}$, 且有 $\vec{s} \neq \vec{0}$.

$\because \vec{s} \cdot \vec{k} = 0, \quad \vec{s} \cdot \vec{i} = 0,$

$\Rightarrow \begin{cases} 6+p=0 \\ 2m=0 \end{cases} \quad \therefore p=-6, \quad m=0,$

$\because \vec{s} \neq \vec{0}, \quad \therefore n \neq 0,$

故当 $m=0,\ n\neq 0,\ p=-6$ 时结论成立.

1.4 平面及其方程

一、填空:

1. 过点 $(3,2,-7)$ 且与 xoz 面平行的平面方程为___   __.

2. 过 z 轴及点 $(1,1,-1)$ 的平面方程为__   _____.

3. 过点 $A(4,0,-2)$ 和 $B(5,1,7)$ 且平行于 z 轴的平面方程为___   ___.

4. 点 $(-2,4,-3)$ 到平面 $2x-y+2z-1=0$ 的距离为____   ____.

5. 两平面 $x-2y-2z-12=0$ 与 $x-2y-2z-6=0$ 之间的距离为_

6. 过点$(4,3,2)$，且在各坐标轴上有相同截距的平面方程为__   ____.

二、求过点 $M_1(2,3,0)$、 $M_2(-2,-3,4)$ 和 $M_3(0,2,0)$ 的平面方程.

三、过点$(1,0,1)$作一平面与平面$x-2y+3z+2=0$和平面$x+2y-3z-2=0$都垂直，求此平面方程.

四、 求过x轴且与平面$\sqrt{5}x+2y+z+6=0$成$\dfrac{\pi}{3}$角的平面方程

五、 求过点 $M_1(1,-1,2)$ 和 $M_2(2,1,3)$，且与平面 $x+y-z+1=0$ 垂直的平面.

1.5

一、填空:

1. 过两点 $M_1(3,-2,1)$ 和 $M_2(-1,0,2)$ 的直线方程为________________________.

2. 过点 $P(-2,-3,1)$ 且平行于 y 轴的直线方程为

3. 直线 $\frac{x-5}{1}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-1}{3}$ 与平面 $x+2y-5z-12=0$ 的交点为.

4. 过点 $(2,4,-1)$ 且与直线 $L_1:\begin{cases}x+2z-1=0\\ y-3z-2=0\end{cases}$ 平行的直线方程是

5.过点 $M_0(0,4,2)$，且与平面 $\pi_1: x+y-2z-1=0$，$\pi_2: x+2y-z+1=0$ 都平行的直线方程为.

二、试求空间直线$\begin{cases} x-y+z+5=0 \\ 3x-8y+4z+4=0 \end{cases}$的对称式方程和参数方程.

三、求过点 $(1,1,4)$ 平行于平面 $3x-4y+z-10=0$，又与直线 $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{2}$ 相交的直线方程.

四、一平面垂直于平面 $z=0$，并且通过从点 $(-1,-2,1)$ 到直线 $\begin{cases} y-z+1=0 \\ x=0 \end{cases}$ 的垂线，求此平面方程.

五 求点 $P(3,1,3)$ 到直线 $L:\begin{cases} x+y-z+1=0 \\ 2x-y+z-4=0 \end{cases}$ 的距离.

解法 2：直线 L 的对称式方程为 $\frac{x-1}{0}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-0}{1}$， $\vec{s}=(0,1,1)$